

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

# РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ В СРЕДЕ «ЛОГОС»

Концентрация напряжений  
Геометрическая нелинейность  
Гидростатическое нагружение обтекателя

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2021

А в т о р ы: *А.И. Смирнов, А.В. Сумин, А.С. Прядкин, Р.А. Барабанов, С.С. Косарим, Д.В. Фомичев, Е.А. Знаменский, В.А. Бородавкин, А.А. Курносос*

Под общей редакцией первого заместителя генерального директора – главного инженера АО «СПМБМ «Малахит» Н.А. Новоселова

УДК 539.3:004.942(075.8)

P24

**P24** **Расчет** конструкций на прочность в среде «Логос». Концентрация напряжений. Геометрическая нелинейность. Гидростатическое нагружение обтекателя: учебное пособие / А.И. Смирнов, А.В. Сумин, А.С. Прядкин [и др.]; под ред. Н.А. Новоселова; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2021. – 76 с.  
ISBN 978-5-907324-61-9

Приведены основные понятия прочностных расчётов, принципы построения расчётных схем, различные методы численного физического моделирования, возможности современного программного обеспечения, применяемого для решения статических задач механики деформируемого твёрдого тела, порядок действий при проведении расчетов на прочность с применением пакета «Логос», примеры расчетов типовых конструкций.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям: 17.05.01 «Боеприпасы и взрыватели» (специалитет); 24.03.01 «Ракетные комплексы и космонавтика» (бакалавриат); 24.04.01 «Ракетные комплексы и космонавтика» (магистратура); 24.05.01 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» (специалитет); 27.05.01 «Специальные организационно-технические системы» (специалитет), а также для специалистов, в области строительной механики и методов численного моделирования физических процессов.

**УДК 539.3:004.942(075.8)**

Р е ц е н з е н т канд. техн. наук, доц. Военного-учебного центра  
БГТУ «Военмех» *А.В. Петрунин*

*Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета*

**ISBN 978-5-907324-61-9**

© БГТУ, 2021  
© Авторы, 2021

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЁТАХ

### 1.1. Основные понятия механики деформируемого твёрдого тела

Ввиду огромного разнообразия современных инженерных конструкций и сооружений, требующих специфичных методов и способов проведения прочностных расчётов, единая наука о создании конструкций разделилась на несколько самостоятельных дисциплин, которые в совокупности называют механикой деформируемого твёрдого тела (рис. 1):

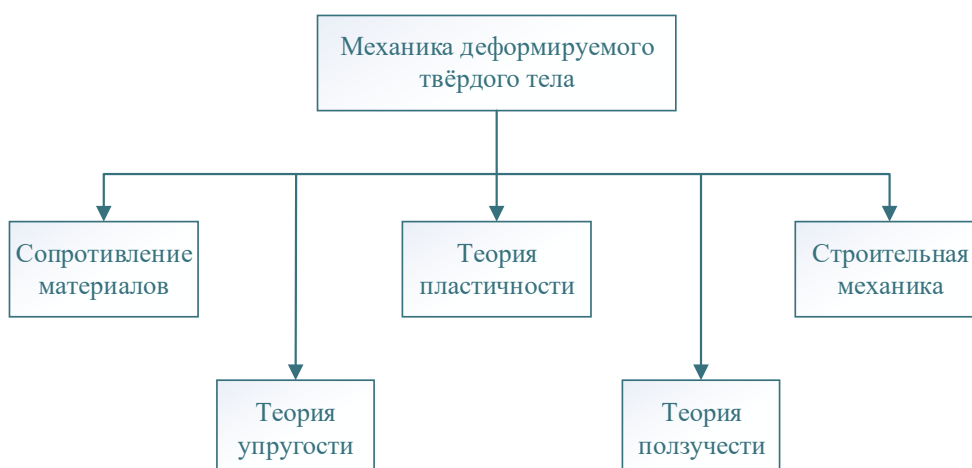


Рис. 1. Составляющие дисциплины «Механика деформируемого твёрдого тела»

*Сопrotивление материалов* – наука о прочности, жёсткости и устойчивости элементов инженерных конструкций.

Методы сопротивления материалов базируются на упрощённых гипотезах, которые позволяют решать широкий круг инженерных задач с приемлемой для практики точностью. Различие между сопротивлением материалов и другими разделами механики деформируемого твёрдого тела состоит в подходах к решению одних и тех же задач. Теория упругости, теория пластичности и теория ползучести основываются на более точных формулировках задач, для решения которых используется более сложный математический аппарат, требующий выполнения громоздких вычислений.

*Теория упругости* – раздел механики деформируемого твёрдого тела, изучающий перемещения, деформации и напряжения в покоящихся и движущихся телах под действием внешних нагрузок.

Упругость – свойство материала полностью восстанавливать геометрическую форму и размеры тела после снятия внешней нагрузки.

На основе общих законов механики в теории упругости создается замкнутая система уравнений, состоящая из уравнений равновесия, геометрических уравнений и обобщённого закона Гука, устанавливающего линейную зависимость между напряжениями и деформациями. Вопрос о том, разрушится ли тело под действием приложенных к нему нагрузок, хотя и тесно связан с теорией упругости, выходит за рамки этой дисциплины и в ней обычно не рассматривается. Основные направления теории упругости:

- оценка точности и применимости решений задач, полученных методами сопротивления материалов;

- решение задач, которые не могут быть решены методами сопротивления материалов. К ним относится, например, расчёт массивных тел, балок-стенок, пластин, оболочек и др.

Дифференциальные уравнения теории упругости позволяют сформулировать краевые задачи, решения которых дают полную информацию о распределении напряжений, деформаций и перемещений в нагруженных телах.

*Теория пластичности* изучает общие законы образования напряжений и деформаций, возникающих на всех стадиях пластического деформирования тела.

Пластичность – свойство твёрдых тел изменять свою форму и размеры под действием внешних нагрузок и сохранять её после снятия этих нагрузок. Причём изменение формы тела (деформирование) зависит только от приложенной внешней нагрузки и не происходит само по себе с течением времени.

Являясь разделом механики деформируемого твёрдого тела, теория пластичности ставит своей целью математическое изучение напряжений и перемещений в пластически деформируемых телах. Большая часть представлений теории упругости используется и в теории пластичности. Однако вместо закона Гука в ней используются законы пластической деформации, с помощью которых составляется система уравнений теории пластичности.

*Теория ползучести* – раздел механики деформируемого твёрдого тела, в котором изучаются законы связи между силами и перемещениями, существенно зависящими от времени.

Ползучесть – свойство твёрдых тел деформироваться под воздействием постоянной нагрузки.

Так, например, при постоянной нагрузке деформации не остаются постоянными, а растут со временем. Или наоборот, если образцу сообщена начальная деформация и наложены связи, сохраняющие эту деформацию неизменной, то реакции связей убывают со временем – релаксируют. Возникающие в результате ползучести деформации, как и пластические, являются необратимыми. Ввиду огромного разнообразия практических задач существует условная классификация ползучести в зависимости от ее продолжительности:

- длительная ползучесть (месяцы и годы), свойственная различным строительным конструкциям, эксплуатируемым в обычных погодных условиях;
- ползучесть средней длительности (часы и дни);
- кратковременная ползучесть (секунды и минуты), характерная для деталей механизмов, работающих в условиях высоких температур.

*Строительная механика* – наука о методах расчёта сооружений на прочность, жёсткость и устойчивость.

Жёсткость – это способность тела или конструкции сопротивляться возникновению деформации.

Устойчивостью упругой системы называют её свойство возвращаться в состояние равновесия после малых отклонений от этого состояния.

Строительная механика как наука восходит своими истоками к первой половине XIX в. в связи с начавшимся в то время активным строительством мостов, железных дорог, плотин, судов и крупных промышленных сооружений. Поэтому в классической строительной механике рассматривались только конструкции, состоящие из стержней и балок.

В дальнейшем потребности практики заставили расширить диапазон геометрических форм, рассматриваемых этой дисциплиной. Так появились курсы «Строительная механика корабля», «Строительная механика самолёта», «Строительная механика ракет», в которых основное внимание уделяется расчёту пластин и оболочек. В этих курсах широко используются методы теории упругости, которые более сложны, чем методы классической строительной механики. На сегодняшний день основными направлениями исследований в области строительной механики являются:

- решение задач о расчёте сооружений из стержней, балок, пластин, оболочек и других тонкостенных конструкций;
- получение расчётных соотношений для построения конечных элементов в методах конечных элементов;
- исследование элементов конструкций, обладающих геометрической или физической нелинейностью;
- расчёт конструкций с учётом вязких свойств материалов, ползучести и длительной прочности;
- расчёт конструкций на динамическое, в том числе сейсмическое, воздействие.

В связи с обширным диапазоном вопросов, подлежащих рассмотрению при проектировании конструкций, основная задача строительной механики сводится к расчётам типовых элементов конструкций, которые создают облик определённого класса сооружений. Кроме того, строительная механика делится также на направления, относящиеся к расчёту конструкций определённого вида: стержневых конструкций (ферм, рам, балочных систем и арок), пластин и пластинчатых систем, оболочек, гибких нитей и вантовых систем, упругих и неупругих оснований, мембран и т.д.

Решения задач, полученные в строительной механике, являются основой для построения специальных прочностных инженерных курсов, в которых рассмат-

ривается расчёт на прочность конкретных конструкций. Такие курсы могут называться, например, «Расчёт самолёта на прочность», «Прочность корабля» и т.п. В этих же курсах излагаются способы оценки несущей способности конструкции и определения коэффициентов запаса прочности и устойчивости.

## 1.2. Создание расчётных схем

Расчёт любого реального сооружения всегда сводится к построению его расчётной схемы, обладающей свойствами, в наибольшей степени совпадающими со свойствами исходного объекта. Это относится и к моделям конструкций, построенных методом конечных элементов (МКЭ). В такой модели конструкция представляется в виде совокупности простейших форм, а поля перемещений или напряжений внутри них аппроксимируются полиномами, коэффициенты которых выражаются через переменные на границах элементов. Здесь также приходится применять разумные упрощения при построении расчётных схем, так как возникают проблемы стыковки разнородных конечных элементов, адекватного разбиения конструкции на конечные элементы разного размера, выбора числа элементов с точки зрения сходимости решения и т.п.

Сначала остановимся на определении модели, а затем на том, какие особенности имеет прочностная модель конструкции, которая называется расчётной схемой.

Моделью конструкции (рис. 2) принято называть вспомогательный объект, заменяющий реальную конструкцию, представленную в наиболее общем виде.



Рис. 2. Модели конструкций

Рассмотрим особенности создания модели конструкции, которая используется в прочностных расчётах и называется расчётной схемой.

Опыт проектирования показывает, что составление расчётной схемы конструкции до её математического описания является одним из важнейших этапов прочностного расчёта. Именно этот этап вызывает наибольшие трудности из-за вариативности выбора геометрии модели, способа приложения внешних сил и условий закрепления моделируемой конструкции.

Для изучения прочности и жёсткости инженерных конструкций обычно рассматриваются их упрощённые схемы, с определённой степенью точности и достоверности отражающие их реальные свойства. Причём в зависимости от требований к точности расчёта для одной и той же конструкции могут быть составлены разные расчётные схемы.

Расчётная схема – это упрощённое изображение реальной конструкции, которое освобождено от её несущественных, второстепенных особенностей и которое принимается для математического описания и расчёта.

Составление расчётной схемы целесообразно проводить по определённому алгоритму, который можно представить в виде следующей последовательности шагов:

- 1) упрощение геометрической формы конструкции;
- 2) использование типовых способов закрепления;
- 3) упрощение нагрузки;
- 4) идеализация свойств материала.

Выбор геометрической формы модели (рис. 3), которая заменит реальную конфигурацию конструкции в расчётной схеме, во многом зависит от точности, с которой требуется получить результат, и от исходной формы самой конструкции.

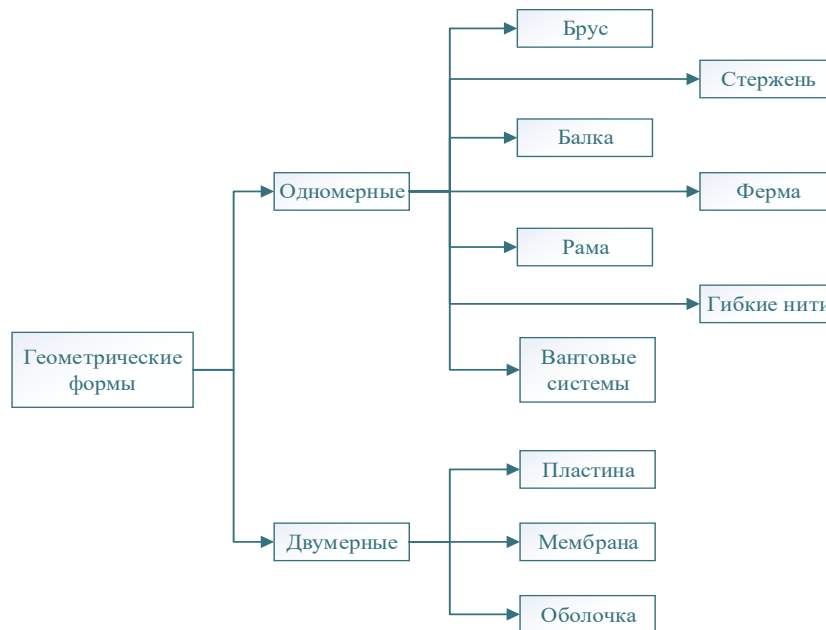


Рис. 3. Типовые геометрические формы

Типовые тонкостенные конструкции обычно состоят из стержней, балок, пластин и оболочек, например конструкция крыла большого удлинения, модель которого может состоять из большого количества стержней и балок. С расчётной точки зрения такая модель статически неопределима. Напряжённо-деформированное состояние в ней можно определить методами строительной механики стержневых систем, что требует значительных вычислительных ресурсов, и это вполне оправданно, если нужно знать прочностное поведение каждого из элементов конструкции или решать задачу о перераспределении материала по конструкции.

В то же время, если нужно ответить на вопрос о том, имеет ли крыло достаточную несущую способность в наиболее нагруженном корневом сечении, то достаточно воспользоваться расчётной схемой крыла в виде балки с жёсткой заделкой на одном конце и свободным вторым концом.

Представить в виде балки можно не только стержневые конструкции. Упрощённую расчётную схему в виде балки можно применять и в конструкциях, состоящих из комбинаций оболочек, пластин, колец, балок и стержней. Примеры – хвостовая часть фюзеляжа самолёта, перекрытие палубы, являющейся подкреплённой оболочкой, состоящей из обшивки и продольных элементов силового набора.

Если же сама конструкция или её часть может быть просчитана без упрощения, то выбор геометрической конфигурации модели для расчётной схемы ясен без дополнительных упрощений и схематизации. Например, если рассматривается плоское днище осесимметричного сосуда, нагруженного внутренним давлением, то это круглая пластинка, которая изгибается постоянным внутренним давлением.

При упрощении геометрии тонкостенной конструкции приходится иметь дело с брусками, стержнями, балками, пластинками или оболочками. В отличие от твёрдого тела – массива – тонкостенные конструкции всегда имеют хотя бы один геометрический размер, который значительно меньше других размеров. Это позволяет упростить исходную систему уравнений теории упругости и свести реальное трёхмерное напряжённо-деформированное состояние к двумерному, как в случае пластин и оболочек, или даже к одномерному, как в случае балок и стержней.

Брус – это твёрдое тело, полученное перемещением плоской фигуры вдоль направляющей линии так, что его длина значительно больше двух других размеров.

Стержнем называется прямолинейный брус, который работает на растяжение (сжатие).

Балкой называется брус, который испытывает изгиб в качестве основного способа нагружения.

Из брусев составляются расчётные схемы многих инженерных конструкций, таких как фермы, рамы и другие пространственные конструкции.

Фермой называется совокупность стержней, соединённых шарнирами.

Рама – это совокупность балок, жёстко соединённых между собой.

Пластиной называется тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с двумя другими размерами тела.

Пластины воспринимают усилия в двух направлениях, что в ряде случаев бывает выгодно с точки зрения экономии материалов. Расчёт пластин и систем, составленных из них, значительно сложнее расчёта стержневых систем.

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами тела.

После выбора геометрической формы модели следует определить места и способы её закрепления.

В физическом пространстве любая точка имеет три степени свободы – по числу координат в этом пространстве. Твёрдое тело имеет шесть степеней свободы, так как к трём поступательным добавляются ещё и три вращательных. Моделирование закреплений сводится к ограничению степеней свободы части тела, заданию перемещений и углов поворота или условий для их определения.

Закрепление – это ограничение одной или нескольких степеней свободы (из шести в общем случае) в заданной точке или сечении.

Особенности моделирования закреплений рассмотрим на примере плоской конструкции, когда в каждой точке можно ограничить две поступательные степени свободы в её плоскости и одну вращательную относительно оси, перпендикулярной этой плоскости. В зависимости от количества определяемых степеней свободы различают следующие способы закрепления:

- жёсткая заделка, которая ограничивает перемещение и угол поворота;
- шарнирное закрепление, ограничивающее одно или несколько перемещений;
- свободный край, на котором перемещения и угол поворота не имеют ограничений.

Так, жёсткое закрепление приводит к возникновению двух реакций и одного момента (рис. 4, *а*). В шарнирном закреплении отсутствует реактивный момент и может освобождаться одно из перемещений (рис. 4, *б*, *в*). На свободном крае ограничения на перемещения и углы поворота отсутствуют, поэтому задаются ограничения на силы и момент, которые в этих примерах равны нулю.

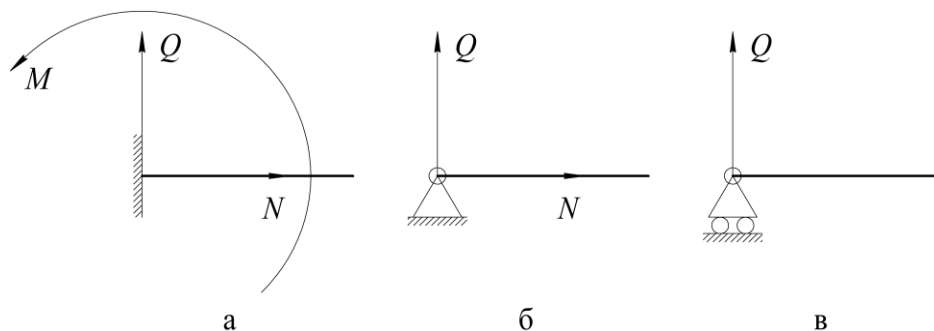


Рис. 4. Реакции в различных закреплениях: *а* – жёсткая заделка; *б* – шарнирная опора; *в* – скользящая шарнирная опора

Расчёт нагрузок является одним из важнейших этапов проектирования любой конструкции.

Нагрузками принято называть внешние силы, действующие на конструкцию или на её части. К нагрузкам также относятся реактивные силы и моменты, возникающие в узлах крепления.

В большинстве случаев определение нагрузок является самостоятельной и не менее сложной задачей, чем расчёт поля напряжений и деформаций по объёму конструкции. Сложность расчёта нагрузок связана с тем, что из-за разнообразия режимов и условий эксплуатации конструкций и сооружений нагрузки имеют различную физическую природу, а следовательно, и собственные методы расчёта, которые во многих случаях не имеют ничего общего с используемыми в строительной механике и должны быть объединены в единую расчётную схему.

Для определения нагрузок приходится пользоваться методами расчёта из разнородных дисциплин, таких, например, как гидродинамика, аэродинамика, динамика полёта, аэрогидроупругость, термодинамика, теплопередача и т.д. Все проблемы, встречающиеся в этих дисциплинах, переходят в область расчёта нагрузок, поэтому возникают новые трудности, связанные со стыковкой различных методов расчёта. В дальнейшем будем считать, что задача определения нагрузок решена, они известны и их нужно только приложить к конструкции в нужных местах.

Таким образом, для всякого расчёта на прочность исходными данными являются чертёж или эскиз конструкции, расчётные данные о нагрузках, температурные поля внутри конструкции, если её температура отличается от стандартной.

По характеру воздействия на конструкцию нагрузки можно разделить на три группы:

1) объёмные или массовые нагрузки, непрерывно распределённые по всему объёму тела и пропорциональные плотности его материала. К ним относятся силы тяжести, силы инерционного происхождения, силы магнитного притяжения и т.п.;

2) поверхностные нагрузки, возникающие в результате взаимодействия тел между собой в зонах контакта или воздействия на тело окружающей среды. Эти нагрузки распределены по поверхности конструкции. Примеры – ветровое воздействие на наземное сооружение, давление и трение потока воды, который обтекает корпус корабля, давление газов внутри замкнутых объёмов и др.;

3) сосредоточенные силы – это точечно приложенные нагрузки. Примеры – тяга двигателя корабля, веса приборов, установленных на палубе, силы, передающиеся на корпус корабля в узлах крепления рулей, и т.д.

По характеру изменения во времени нагрузки делят на статические и динамические. К статическим относят те нагрузки, время воздействия которых значительно больше, чем период собственных колебаний конструкции. Как правило, время воздействия динамической нагрузки значительно меньше, чем период собственных колебаний конструкции.

Следует заметить, что одна и та же нагрузка может относиться к различным группам из приведённого списка в зависимости от условий эксплуатации сооружения.

Подробнее остановимся на силах и моментах – реакциях, возникающих в местах крепления конструкции, и на внутренних силах, которые возникают в сечениях тела.

При решении задач методами механики деформируемого твёрдого тела всегда приходится задавать граничные условия в местах крепления конструкции. Эти условия могут быть кинематическими и статическими.

Кинематические условия – это условия на перемещения и углы поворота. Они логично следуют из выбранного для расчётной схемы способа закрепления и обычно используются в тех случаях, когда в решаемой задаче определяются перемещения. Исходные уравнения записываются относительно перемещений, а методы решения этих уравнений называются методами перемещений или задачами в перемещениях.

Статические условия – это условия на силы и моменты в местах крепления. Эти силы проявляют себя как реакции опоры на внешнее воздействие, создаваемое телом на опоре. Точно такие же силы и моменты, но действующие в противоположном направлении (по третьему закону Ньютона), приложены и к опоре. При статических граничных условиях приходится затрачивать дополнительные усилия для определения реакций. Они определяются из условий равновесия тела, которых в общем случае всего шесть: три условия равновесия в проекциях на оси координат и три условия на равенство нулю моментов относительно осей координат.

Если шести уравнений статики недостаточно для определения реакций в местах крепления тела, то задачу называют статически неопределимой и приходится обращаться к условиям деформации тела. При этом все задачи теории упругости, теории пластичности и теории ползучести являются статически неопределимыми.

По этой причине полная система уравнений теории упругости, например, состоит из трёх групп уравнений. Кроме уравнений равновесия в точке твёрдого тела, записываются геометрические уравнения, следующие из рассмотрения условий деформации тела. Замыкают эти две группы физические уравнения, построенные на основе эмпирических данных о связи напряжений с деформациями.

Остановимся на тех случаях, когда внутренние силы относят к внешним нагрузкам и обращаются с ними, как с внешними. Внутренние силы и моменты появляются тогда, когда тело мысленно делят на две части и для обеспечения условий его равновесия действие отброшенной части на рассматриваемую часть заменяют внутренними усилиями и моментами. Эта процедура называется методом сечений и широко используется при определении напряжений в сечениях тела.

В большинстве случаев нагрузки не являются детерминированными, т.е. принимающими определённые значения для фиксированных физических координат системы и времени. В большинстве случаев нагрузки являются случайными функциями координат и времени.

На практике встречаются следующие типы задач, которые требуют привлечения аппарата теории случайных функций:

1. По заданным свойствам случайных функций необходимо определить вероятностные характеристики процесса, например дисперсию ординаты случайной функции.

2. Задачи, в которых вероятностные характеристики определяются по экспериментальным данным. Здесь используются обычные способы обработки опытных данных, применяемые в теории случайных величин, с той лишь разницей, что учитывают зависимости между ординатами реализаций (опытов) случайных функций.

3. Искомые случайные функции описываются дифференциальными зависимостями, и задачи обычно сводятся к определению вероятностных характеристик случайных функций, получаемых на «выходе» системы, по вероятностным характеристикам случайных функций, поступающих на «вход» системы.

В любой из указанных задач поведение исследуемой величины достаточно полно может быть охарактеризовано её математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией.

Далее будем использовать детерминированный подход к расчёту нагрузок, в котором фактически определяется лишь среднее значение нагрузки и не рассматриваются её вероятностные характеристики.

Следует также заметить, что вероятностный подход на основе случайных функций может быть применён и к расчёту напряжённого состояния конструкции, когда соответствующие напряжения и деформации считаются случайными функциями.

При составлении расчётной схемы конструкция обычно представляется в виде сплошной среды, обладающей заданными физико-механическими свойствами. Эти свойства могут быть постоянными или переменными по объёму тела. С этой точки зрения в практике инженерного проектирования принято различать несколько типов материалов:

- *изотропный* – материал, свойства которого постоянны по любому направлению внутри него;
- *ортотропный* – материал, свойства которого переменны по взаимно перпендикулярным направлениям;
- *анизотропный* – материал, свойства которого зависят от направления, в котором они определяются;
- *структурно анизотропный* – материал, у которого упругие и пластические свойства выделенного элемента зависят от его угловой ориентации;
- *конструктивно анизотропным* называется идеализированный материал, получивший новые свойства в результате размазывания однородных конструктивных элементов (объединяет в себе схематизацию свойств материала и геометрических особенностей конструкции).

При выборе материала для расчётной схемы, а потом и для конструкции, многое зависит от нагрузки. И здесь приходится учитывать два фактора:

- 1) уровень нагрузки и длительность её воздействия;
- 2) характер воздействия нагрузки с точки зрения исчерпания несущей способности конструкции.

В зависимости от уровня нагрузки различают три типа поведения материала конструкции: упругое, пластическое и с эффектами ползучести. Принципиальным здесь является то, что после снятия внешней нагрузки исходная конфигурация тела восстанавливается. И совсем не обязательно, чтобы существовала линейная зависимость между напряжениями и деформациями, постулируемая законом Гука, который лежит в основе линейной теории упругости. Если связь между напряжениями и деформациями нелинейная, то в этом случае речь идёт о нелинейной теории упругости. В связи с появлением полимерных материалов, получивших широкое распространение в последние десятилетия и обладающих свойствами нелинейной упругости, сейчас весьма актуальным является вопрос о создании простых и эффективных методов решения физически нелинейных задач теории упругости.

Если материал линейно-упругий, то коэффициент пропорциональности между напряжениями и относительными деформациями, называемый модулем упругости, изменяется в довольно широком диапазоне. С увеличением этого коэффициента материалы начинают подчиняться закону Гука вплоть до разрушения конструкции. Хорошим примером такого поведения являются керамические материалы, которые разрушаются в пределах линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

При малых начальных модулях упругости, типичных для полимеров, возникает упругая нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями. Промежуточное положение занимают металлы (особенно это типично для сталей), у которых вначале наблюдается линейная зависимость между напряжениями и деформациями, а затем возникает довольно значительная область пластических деформаций.

Свойство пластичности присуще очень многим конструкционным материалам, в первую очередь – металлам и сплавам (сталь, железо, медь, алюминий и др.).

За пределом пропорциональности на диаграмме зависимости напряжений от деформаций следует предел текучести, после которого в материале начинают возникать пластические деформации.

Если после появления пластических деформаций начать разгрузку, то тело вернётся в ненагруженное состояние по линии, параллельной линии нагрузки, но смещённой на величину пластической деформации.

Кроме упругости и пластичности, у многих материалов при длительном нагружении постоянной нагрузкой, например у сталей при высоких температурах, возникает явление ползучести. Другое особое свойство ползучести состоит в том, что если зафиксировать относительную деформацию, то с течением времени напряжения в материале конструкции уменьшаются. Это явление называется релаксацией.

На выбор материала для конструкции влияет характер нагружения.

При создании конструкции минимальной массы плотность материала и его прочностные свойства вступают в противоречие, так как материалы с большей плотностью обладают и большими значениями предела прочности. Наилучшим в этом случае считается материал, который имеет более высокие удельные харак-

теристики. Для конструкций, работающих на устойчивость, вместо удельной прочности используется удельная жёсткость, определяемая плотностью и модулем упругости, а не пределом прочности.

### 1.3. Методы численного физического моделирования

Несомненным достоинством аналитических формул является возможность анализа множества вариантов при различных входных проектных параметрах; кроме того, они позволяют получать легко обозримые результаты и не требуют значительных вычислительных ресурсов, что особенно важно на этапе проектирования конструкции.

К сожалению, аналитические решения получены только для простейших и типовых элементов реальных конструкций, которые заменяются простыми расчётными схемами, допускающими получение аналитических решений. Примером такой расчётной схемы может служить балка, которая моделирует поведение реального крыла летательного аппарата. В то же время потребности практики проектирования инженерных сооружений поставили вопрос о создании более универсальных и практически реализуемых методов, которые позволяли бы получать достоверное решение для сколь угодно геометрически сложной формы конструкции. Отсюда возникла идея попытаться построить решение задачи при помощи не одной или нескольких функций, а дискретного множества чисел, которые описывали бы поведение конструкции в отдельных её точках.

Сами эти числа являются или искомыми величинами, или параметрами, которые используются для построения функций, описывающих поле перемещений, напряжений или деформаций в конструкции. Так возникли «методы дискретизации», или «численные методы», которые явились плодом совместных усилий математиков и инженеров.

Несмотря на то, что многие из этих методов созданы давно и предпринимались попытки массовых «ручных» вычислений – на логарифмических линейках, арифмометрах и калькуляторах, что широкое внедрение их в расчётную практику произошло с появлением ЭВМ.

Методы дискретизации можно разделить по следующим признакам:

1) по типу исходных математических соотношений:

– дифференциальные уравнения, описывающие поведение моделируемой среды;

– вариационные принципы, записанные в интегральной форме и эквивалентные дифференциальным уравнениям;

2) по методу дискретизации исходных соотношений:

– метод конечных разностей;

– метод взвешенных невязок.

Комбинация перечисленных методов дискретизации даёт четыре их категории, представленные в табл. 1; используются также комбинации дискретных и аналитических методов: метод полос, метод редуцированных коэффициентов и т.п.

Т а б л и ц а 1

## Классификация численных методов

Дискретизация	Исходные соотношения	Метод дискретизации
Разностные отношения	Дифференциальные уравнения	Классический метод конечных разностей
	Вариационные принципы	Вариационно-разностные методы
Базисные функции	Дифференциальные уравнения	Метод Бубнова–Галеркина, метод наименьших квадратов, моментов, метод коллокаций по точкам и подобластям
	Вариационные принципы	Метод Ритца, метод конечных элементов

Методы, использующие базисные функции, составляют обширный класс под общим названием «методы взвешенных невязок». Они обладают большей общностью, чем прямой метод конечных разностей. Более того, для построения расчётных схем на их основе можно воспользоваться теми же процедурами, которые применяются в методе конечных элементов.

К методу конечных разностей (МКР) относят те способы дискретизации, в которых производные в исходных уравнениях заменяются разностными отношениями. Причём если уравнения записаны в дифференциальной форме, то МКР называют классическим методом конечных разностей (иногда – методом сеток). Если для получения дискретных соотношений используются вариационные принципы, то в этом случае методы называют вариационно-разностными.

Метод сеток, который широко применялся для дискретизации уравнений механики сплошных сред и механики твёрдого тела, в частности, ещё до появления метода конечных элементов, имеет следующие достоинства:

- универсальность методологии построения разностных уравнений;
- быстрота получения разностных соотношений;
- сведение дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений ленточной структуры, которые решаются по хорошо отлаженным математическим процедурам;
- хорошо разработанный аппарат анализа погрешностей аппроксимации и устойчивости вычислительных схем;
- простота программ на сеточных областях, границы которых параллельны осям координат или совпадают с ними;
- наличие хорошо проверенных программ для выполнения матричных операций.

Из числа наиболее заметных недостатков МКР можно назвать следующие его особенности, которые стимулировали появление других методов дискретизации исходных уравнений, в частности метода конечных элементов:

- необходимость модификации разностной схемы на криволинейных границах;

- необходимость использования узлов разностной сетки за границами области интегрирования;
- модификация разностной схемы на границах области, способ которой зависит от типа граничных условий.

Кроме того, если задаются естественные граничные условия, то матрица системы алгебраических уравнений становится несимметричной.

Большинство задач механики твёрдого тела имеют две равнозначные математические формулировки: дифференциальную и вариационную.

При дифференциальной формулировке необходимо решить дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений при заданных граничных и начальных условиях.

Эти уравнения могут быть гиперболического, параболического или эллиптического типа. Например, уравнения динамики конструкций можно свести к уравнениям гиперболического типа, а уравнения теплопроводности могут быть как параболического, так и эллиптического типа.

Задачи статики линейно-упругого тела описываются уравнениями эллиптического типа, к которым добавляются условия на границе области интегрирования, количество и тип которых зависят от наивысшего порядка дифференциального оператора.

Эти условия бывают двух типов:

- 1) главные (геометрические) граничные условия на участке границы области. Обычно они задаются на перемещения и их производные;
- 2) естественные граничные условия (динамические) на участке границы области.

Различие между главными граничными условиями и естественными заключается в том, что первые всегда сохраняются, а вторые меняются при предельном переходе от приближенного решения к точному.

При вариационной формулировке задачи отыскивается функция (или функции), которая доставляет экстремум или стационарное значение функционалу или системе функционалов, имеющих такие же граничные условия, что и дифференциальная задача.

Дифференциальная и вариационная формулировки задачи совершенно эквивалентны, так как функции, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям и их граничным условиям, обеспечивают также экстремум или делают функционалы стационарными.

Функционалом называют переменную величину-функцию, в которой роль независимого переменного выполняют функции. Если функционал определен, то каждой функции из допустимого класса поставлено в соответствие некоторое число – значение функционала. Если выбрать соответствующим образом функционал, то функции, которые обеспечивают его минимум, являются решением дифференциальной задачи.

Таким образом, каждая из этих постановок – дифференциальная или вариационная – приводит к желаемому результату, так как определяются функции, которые описывают поведение сплошной среды.

Эквивалентность этих формулировок показывается в курсах вариационного исчисления. И очень часто вариационная формулировка задачи оказывается проще и удобнее с точки зрения получения приближенного решения, которое находится численными методами, и обладает следующими достоинствами:

1. Порядок производных в функционале ниже, чем в дифференциальном операторе, что позволяет отыскивать решение в более широком классе функций.

2. Можно найти минимум, а затем максимум функционала, определяя его верхнюю и нижнюю границы.

3. Вариационная формулировка позволяет описать граничные условия на границах сложной геометрической формы как естественные граничные условия.

4. С математической точки зрения вариационная формулировка позволяет доказать существование решения.

Однако постановка задачи в дифференциальной форме обычно известна, а выражение для функционала, минимум которого необходимо отыскивать, не всегда удаётся найти. У вариационной постановки есть и другие недостатки, в первую очередь связанные с граничными условиями: для каждой задачи нужно выделять главные и естественные граничные условия. Пробные функции, которые доставляют минимум функционалу, должны обязательно содержать в себе главные краевые условия и не обязательно естественные, так как эти условия удовлетворяются в среднем в процессе поиска минимума. Практическая проверка класса условий сводится к обратному переходу от вариационной задачи к дифференциальной и последующему сравнению полученной задачи с исходной.

В задачах статики линейно-упругого тела энергетический функционал известен и может быть записан в разной форме при помощи вариационных принципов механики, которые позволяют учесть особенности рассматриваемого напряжённо-деформированного состояния твёрдого тела.

Рассмотрим некоторые вариационные принципы, наиболее часто используемые при численном решении задач механики деформируемого твёрдого тела.

Виртуальными (возможными) перемещениями называются такие перемещения, которые допускаются наложенными на систему связями.

*Формулировка принципа виртуальных перемещений:* если начальное напряжённо-деформированное состояние тела является равновесным, то первая вариация работы внешних сил равна вариации работы внутренних сил, выполненной на виртуальных перемещениях.

Если в приведённом определении поменять причину и следствие местами, то принцип виртуальных перемещений можно сформулировать иначе: если суммарная работа всех сил при любом возможном бесконечно малом перемещении равна нулю, то система находится в равновесии.

Рассмотрим частный случай формулировки принципа возможных перемещений, т.е. в консервативной системе, когда материал линейно-упругий, а процесс деформирования тела происходит при постоянной температуре (изотермический процесс) или без обмена энергией с окружающей средой (адиабатический процесс).

Упругая система называется консервативной, если после снятия нагрузки она возвращается в исходное состояние и при этом не совершается никакой

внешней работы над другими телами или системами. Иными словами, в консервативной механической системе действует закон сохранения механической энергии.

В этом случае работа, выполненная внешними статическими силами, равна изменению внутренней энергии, которая называется энергией деформации, так как определяется количеством деформации, полученной телом.

*Формулировка принципа минимума полной потенциальной энергии:* среди всех допустимых конфигураций тела, которые удовлетворяют его внутренней сплошности и кинематическим граничным условиям, те конфигурации, которые удовлетворяют также и уравнениям равновесия, дают полной потенциальной энергии стационарное значение. Если она минимальна, то равновесие, кроме того, будет устойчивым.

Рассматривая геометрически линейное тело, сформулируем вариационный принцип виртуальных напряжений, являющийся дополнительным к принципу виртуальных перемещений, который эквивалентен уравнениям равновесия. Формулируется он следующим образом: если деформация системы согласуется со всеми внутренними и внешними связями, то сумма работ, производимых возможными изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях тела, равна нулю.

Он справедлив для материала с любыми физико-механическими свойствами, но поведение тела при деформировании должно подчиняться геометрически линейным уравнениям теории упругости. В формулировке принципа деформации и перемещения действительные, а виртуальные напряжения и внешние поверхностные нагрузки произвольные, но они должны быть статически допустимыми. Кроме того, внешние поверхностные силы остаются без изменений.

При использовании принципа возможных перемещений следует обеспечить условие сплошности тела, а принцип возможных изменений напряженного состояния требует предварительного выполнения уравнений равновесия внутри и на поверхности тела.

*Формулировка принципа минимума дополнительной потенциальной энергии:* из всех статически возможных систем напряжений, сводящихся на поверхности тела к заданным нагрузкам, в действительности в упругой системе возникают лишь те из них, которые сообщают экстремальное (минимальное) значение дополнительной потенциальной энергии.

Особенность этого метода состоит в том, что для получения значений неизвестных напряжений и деформаций в дискретных расчётных точках области используются энергетические функционалы, в которых производные, входящие в интегралы, аппроксимируются разностными отношениями.

Получение приближённых соотношений этим методом можно представить в виде последовательности шагов:

1. Строится сетка узлов внутри рассматриваемой области, включая её границу.
2. Записываются в разностном виде выражения для перемещений и деформаций через их значения в соседних узлах области. Эти выражения подставляются в функционал, соответствующий решаемой задаче.

3. Область делится на подобласти так, чтобы их границы не проходили через узлы.

4. Интегралы по области заменяются на сумму интегралов по подобластям.

5. Интегралы по подобластям вычисляются численно. В большинстве случаев используется одноточечная квадратура Гаусса. Точка внутри области, используемая при вычислении интеграла, не обязательно совпадает с узлом, поэтому приходится пользоваться интерполяционными формулами.

6. Вычисляется экстремум функционала по искомым неизвестным (перемещениям или напряжениям). В результате получается система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить напряжённо-деформированное состояние в узловых точках области.

Основные недостатки этого метода связаны с определением подобластей, окружающих узлы разностной сетки. В случае линейных областей, как это бывает при расчёте брусьев и оболочек, эти трудности легко преодолеваются и позволяют получить искомую систему линейных алгебраических уравнений с матрицей ленточной структуры.

В методе конечных разностей для заданного набора узловых точек строятся разностные отношения дифференциальных операторов, которые входят в дифференциальные уравнения или в интегральные условия (вариационно-разностные методы).

Отличие метода базисных функций от метода конечных разностей состоит в том, что приближенное решение отыскивается в виде ряда по системе линейно-независимых базисных функций. Эти функции, кроме линейной независимости, должны удовлетворять ещё и условиям полноты, обеспечивающим сходимость приближенного решения задачи к точному при увеличении количества базисных функций.

Система линейно независимых функций называется полной, если при возрастании их числа она сколь угодно точно аппроксимирует заданную функцию и её значения на границе.

При решении задач методом базисных функций вначале выбираются базисные функции, а затем определяются коэффициенты в разложении так, чтобы оно удовлетворяло исходным уравнениям и граничным условиям.

В последние годы широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ), в котором проблемы выбора базисных функций и удовлетворения граничных условий решаются простым и естественным путём.

Основная идея метода состоит в том, что область интегрирования разбивается на ряд элементов, которые можно рассматривать как отдельные её части. В пределах этих частей неизвестные функции аппроксимируются базисными функциями простейшего вида, например полиномами, коэффициенты которых выражаются через неизвестные значения искомого переменных в узловых точках границ элемента.

Выбор в качестве базисных функций кусочных полиномов, отличных от нуля только в непосредственной окрестности одного узла, позволяет снять сложные

вопросы построения систем функций, требующих расширения их числа путём включения следующих членов ряда и удовлетворения кинематическим граничным условиям во всей рассматриваемой области. В МКЭ для повышения точности расчёта количество пробных функций не меняется, а производится только измельчение конечного элемента. Эти особенности метода позволяют существенно упростить алгоритмы расчёта и обеспечить удовлетворение граничных условий.

Методы взвешенных невязок основываются на сведении к минимальному значению функции невязок для приближенного решения, представленного в виде разложения по базисным функциям. Различные способы отыскания минимума функции невязок и определяют множество вариантов этого метода.

Обычно эти методы используются в тех случаях, когда для исходной дифференциальной задачи отсутствует соответствующий ей функционал, хотя это не исключает возможности применения таких методов и в тех случаях, когда такой функционал имеется.

Следует отметить, что метод взвешенных невязок является более общим и универсальным по сравнению с вариационными методами, так как позволяет решать и те дифференциальные задачи, для которых отсутствуют их вариационные формулировки.

Функция невязок определяется после подстановки приближенного решения в дифференциальный оператор. Если базисные функции в разложении не удовлетворяют всем граничным условиям, то строятся ещё две функции невязок: погрешности нарушения главных и естественных граничных условий на участке границы.

В методе невязок задача состоит в том, чтобы подобрать коэффициенты в приближенном разложении по базисным функциям так, чтобы осреднённые значения функции невязок стали сколь угодно малыми в рассматриваемой области и на её границах.

Взвешенные невязки можно использовать и в том случае, когда кроме исходного уравнения приближённо удовлетворяются и естественные граничные условия, а главные (существенные) удовлетворяются точно.

Существует множество различных вариантов методов взвешенных невязок: метод Бубнова–Галеркина, метод коллокации, метод наименьших квадратов, метод моментов и т. д. Остановимся более подробно на первом.

Метод решения дифференциальных уравнений разработан И.Г. Бубновым, конструктором военных судов и основоположником строительной механики корабельных конструкций. Иногда этот метод называют методом академика Б.Г. Галеркина, отечественного механика и математика, который после И.Г. Бубнова внёс весомый вклад в дальнейшее развитие и практическое использование этого метода. В этом методе в качестве весовых и базисных функций используются одни и те же функции, что порождает симметричную матрицу коэффициентов в системе линейных алгебраических уравнений, к которым сводится решение исходной дифференциальной задачи.

Основные достоинства метода Бубнова–Галеркина:

- симметричная матрица коэффициентов в системе линейных алгебраических уравнений, к которым сводится решение исходной дифференциальной задачи;
- возможность решать дифференциальные уравнения и их системы даже в тех случаях, когда они не имеют соответствующей вариационной формулировки.

#### **1.4. Возможности современного программного обеспечения, применяемого для решения статических задач механики деформируемого твёрдого тела**

Для решения прикладных задач доступны различные, в том числе и отечественные пакеты. Опишем кратко возможности некоторых из них.

##### ***CAE Fidesys:***

- расчёт на прочность при действии статических нагрузок;
- расчёт на прочность при действии динамически нагрузок;
- расчёт собственных частот и форм колебаний (модальный анализ);
- расчёт критических нагрузок и форм потери устойчивости;
- расчёт на прочность для больших перемещений (геометрическая нелинейность);
- расчёт на прочность для высокоэластичных материалов (физическая нелинейность);
- учёт контактного взаимодействия;
- расчёт тепловых режимов, теплопотерь, температурных деформаций деталей и конструкций.

##### ***Зенит-95:***

- расчёт на прочность при действии статических нагрузок;
- расчёт на прочность с учётом геометрической нелинейности при изменяющихся во времени статических нагрузках и кинематических граничных условиях;
- расчёт параметров динамических переходных процессов с учётом геометрической нелинейности (механизмы) и изменения структуры модели (контакты, соударения звеньев);
- расчёт собственных частот и форм колебаний (модальный анализ);
- расчёт параметров стационарных и нестационарных процессов теплопередачи;
- совместное решение задач механики и теплофизики.

##### ***Логос–Прочность:***

- расчёт на прочность при действии статических нагрузок;
- расчёт на прочность при действии динамически нагрузок (явная схема интегрирования);
- расчёт на прочность для больших перемещений (геометрическая нелинейность);
- расчёт на прочность для высокоэластичных материалов (физическая нелинейность);

- учёт контактного взаимодействия;
- расчёт собственных частот и форм колебаний (модальный анализ);
- гармонический анализ;
- проведение связанных расчётов механики с теплофизикой и с гидрогазо-аэродинамикой.

Из вышеперечисленных возможностей каждого из пакетов видно, что все они обладают примерно одинаковым функционалом при решении задач структурного анализа. Однако CAE Fidesys и «Зенит-95» могут решать только прочностные и тепловые задачи, хотя CAE Fidesys могут интегрироваться с отечественным пакетом FlowVision, позволяя при этом выполнять связанные расчёты. Модуль ПО «Логос–Прочность» входит в состав пакета «Логос», в который интегрирован модуль вычислительной гидродинамики «Логос Аэро-Гидро», позволяя выполнять связанные расчёты без покупки дополнительного ПО.

## **2. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ИЗВЕСТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ**

Практически любую существующую в реальности конструкцию можно свести к упрощённой модели, для которой существует аналитическое решение. Основными конструкциями, модели которых имеют аналитическое решение являются: стержневые (фермы, рамы, балочные системы, арки), пластины и пластинчатые системы, мембраны, оболочки, гибкие нити и вантовые системы, упругие и неупругие основания.

Расчёт любой реальной конструкции всегда начинается с построения её расчётной схемы, обладающей свойствами, отражающими с определённой степенью точности и достоверности её реальные свойства. Причём в зависимости от требований к точности расчёта для одной и той же конструкции могут быть составлены разные физические модели. При этом на каждом этапе составления расчётной схемы принимаются допущения при упрощении геометрической формы конструкции, при идеализации граничных условий и свойств материала. Основные особенности и примеры применения тех или иных допущений к реальным конструкциям были приведены в разд. 1.

### **2.1. Задача о растяжении пластины, ослабленной круглым вырезом**

При проектировании и оценке прочности деталей, работающих при переменных нагрузках и температурах, необходимо особое внимание уделять зонам концентрации напряжений и деформаций – источникам образования трещин, приводящим к преждевременному разрушению деталей.

Концентрацией напряжений принято называть резкое местное изменение поля напряжений, вызываемое:

- конструктивными факторами – изменением размеров сечений и формы деталей (выточки, галтели, отверстия, пазы, канавки и т.п.);

- внешними воздействиями (силовыми, контактными, температурными);
- технологическими факторами (трещинами технологического происхождения и литья, сварки и т.п.).

Существенная особенность концентрации напряжений состоит в том, что в зоне концентратора часто образуется сложное напряжённое состояние (даже при одноосном напряжённом состоянии на невозмущённой границе области). Зона возмущения поля напряжений обычно невелика, однако, как показывает практика, концентрация напряжений снижает прочность деталей, работающих при переменных нагрузках и повышенных температурах. Детали из хрупких материалов (например, из высокопрочных сталей) могут разрушаться преждевременно и при статических нагрузках. Рассмотрим концентрацию напряжений в элементах конструкций, обусловленную конструктивными факторами.

Концентрацию напряжений принято оценивать теоретическим коэффициентом  $\alpha$ , равным отношению напряжения при наличии концентратора к напряжению в той же точке при отсутствии концентратора.

Если деталь работает при простом напряжённом состоянии на границе невозмущённой области, то

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}, \quad \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{ном}}},$$

где  $\alpha_{\sigma}$  – теоретический коэффициент концентрации нормальных напряжений;  $\alpha_{\tau}$  – теоретический коэффициент концентрации касательных напряжений;  $\sigma_{\max}$  – максимальные местные нормальные напряжения, вычисленные методами теории упругости или определённые экспериментально, Па;  $\sigma_{\text{ном}}$  – номинальные нормальные напряжения, найденные без учёта возмущений (обычно по формулам сопротивления материалов), Па;  $\tau_{\max}$  – максимальные местные касательные напряжения, вычисленные методами теории упругости или определённые экспериментально, Па;  $\tau_{\text{ном}}$  – номинальные касательные напряжения, найденные без учёта возмущений (обычно по формулам сопротивления материалов), Па.

Для деталей, работающих в условиях сложного напряжённого состояния (на границах невозмущённой области),

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{i \max}}{\sigma_{i \text{ ном}}},$$

где  $\sigma_{i \max}$  – интенсивность максимального местного напряжения в точке тела, Па;  $\sigma_{i \text{ ном}}$  – интенсивность максимального номинального напряжения в точке тела, Па.

В ряде случаев для оценки сопротивления разрушению, помимо коэффициентов концентрации напряжений, используют градиент напряжений – быстроту затухания напряжений по мере удаления от концентратора. Градиент напряжений находят как отношение приращения напряжений в двух соседних точках к расстоянию между ними.

Расчёт концентрации напряжений проводят часто методами теории упругости (с использованием теории аналитических функций и аппарата конформного отображения). В последние годы получили развитие и широкое применение чис-

ленные методы теории упругости, позволяющие эффективно решать задачи расчёта концентрации напряжений и деформаций в элементах конструкций в условиях упругости, пластичности и ползучести.

Многие элементы конструкций имеют отверстия конструктивного или технологического назначения. При одноосном (в одном направлении) растяжении пластины большой ширины ( $b > 5 \cdot d$ ) с круглым отверстием (рис. 5) в точках на контуре отверстия возникают нормальные напряжения:

$$\sigma_{\theta} = (1 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \theta)) \cdot p, \quad (1)$$

где  $\theta$  – полярный угол (азимут), градус;  $p$  – растягивающее давление, приложенное на стороне пластины, Па.

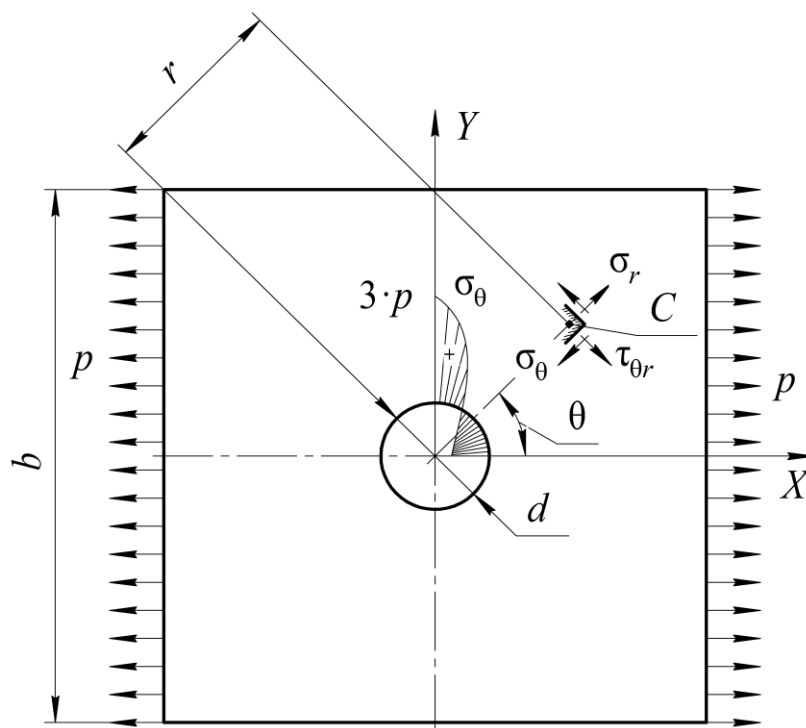


Рис. 5. Распределение напряжений в пластине с круглым отверстием

В некоторой точке  $C$ , удалённой от центра отверстия на расстояние  $r$ ,

$$\sigma_r = ((1 - \rho^2) + (1 - 4 \cdot \rho^2 + 3 \cdot \rho^4) \cdot \cos(2 \cdot \theta)) \cdot \frac{p}{2}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta} = ((1 + \rho^2) - (1 + 3 \cdot \rho^4) \cdot \cos(2 \cdot \theta)) \cdot \frac{p}{2}, \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta} = ((1 + 2 \cdot \rho^2 - 3 \cdot \rho^4) \cdot \cos(2 \cdot \theta)) \cdot \frac{p}{2}, \quad (4)$$

где  $\rho$  – безразмерный параметр, определяющий положение точки  $C$  на плоскости:  $\rho = d/2r$ ,  $d$  – диаметр отверстия в пластине, м;  $r$  – длина радиуса-вектора от начала координат до точки  $C$ , м;  $\theta$  – полярный угол (азимут), градус;  $p$  – растягивающее давление, приложенное на стороне пластины, Па.

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают соответственно в точках пересечения контура отверстия с осью  $Y$  ( $\sigma_{\max} = 3 \cdot p$ ) и с  $X$  ( $\sigma = -p$ ), а коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{p} = 3$ .

При двухосном растяжении пластины больших размеров ( $b > 5 \cdot d$ ), ослабленной отверстием, концентрация напряжений снижается и зависит от соотношения  $p_1$  и  $p_2$  на невозмущённой границе области (рис. б). При  $p_1 = p_2 = p$  теоретический коэффициент  $\alpha_\sigma = 2$  и нормальные напряжения на контуре будут одинаковыми во всех точках. Такая концентрация напряжений типична для дисков компрессоров, где в полотно имеются отверстия для стяжных болтов, пропускающие охлаждающего воздуха и т.п.

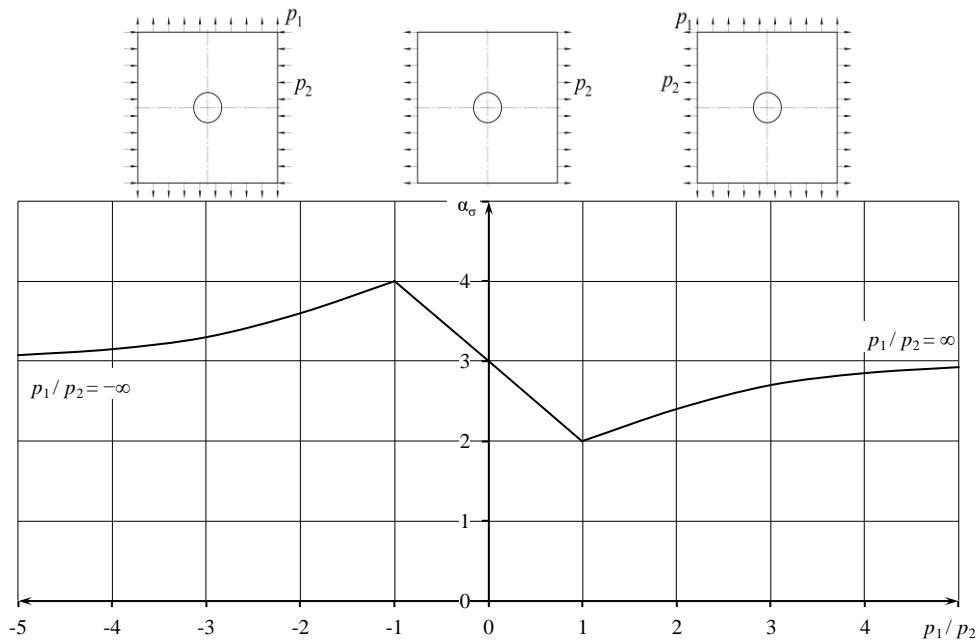


Рис. 6. Зависимость коэффициента концентрации напряжений от отношения напряжений на границе невозмущённой области пластинки с круглым отверстием

Большой практический интерес представляет случай действия на границе невозмущённой области пластины с отверстием растягивающих и сжимающих напряжений (см. рис. 6). Концентрация напряжений в этом случае также зависит

от соотношения  $p_1$  и  $p_2$ . Такая зависимость встречается в дисках газовых и паровых турбин, где при большом градиенте температур окружные напряжения могут быть сжимающими, хотя радиальные напряжения растягивающие. Аналогичное напряжённое состояние, лишь с равными по модулю нагрузками в невозмущённой области ( $p_1 = -p_2$ ), имеет место при кручении полых валов (например, вал ходового винта). Теоретический коэффициент концентрации напряжений в этом случае имеет наибольшее значение:  $\alpha_\sigma = 4$ .

## 2.2. Аналитическое решение задачи

Рассмотрим пример решения задачи об одноосном растяжении пластины, ослабленной круговым вырезом (задача Кирша). Определим значение кольцевых напряжений по внутреннему краю кругового выреза в точках  $A$  и  $B$ , лежащих на пересечении окружности с осями координат, а также значения кольцевых, радиальных и касательных напряжений в произвольной точке  $C$ , удалённой на расстояние  $r_2 = d \cdot \sqrt{2}$  от центра окружности выреза и находящейся под углом  $\theta = 45^\circ$  к оси  $X$ . Расчётная схема пластины представлена на рис. 7.

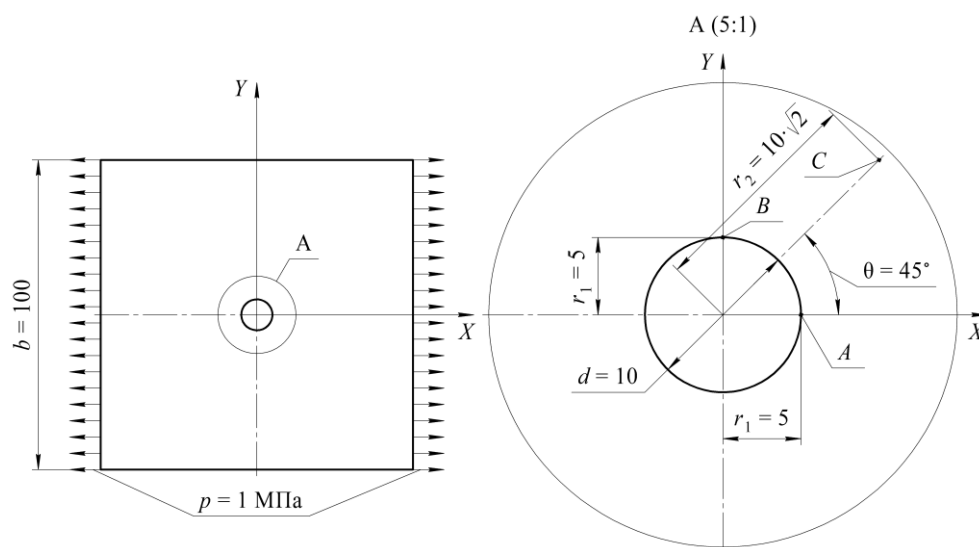


Рис. 7. Расчётная схема одноосного растяжения пластины, ослабленной круговым вырезом

Распределение нормальных напряжений в точках на контуре отверстия, по азимуту от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , определённое по формуле (1), представлено на рис. 8.

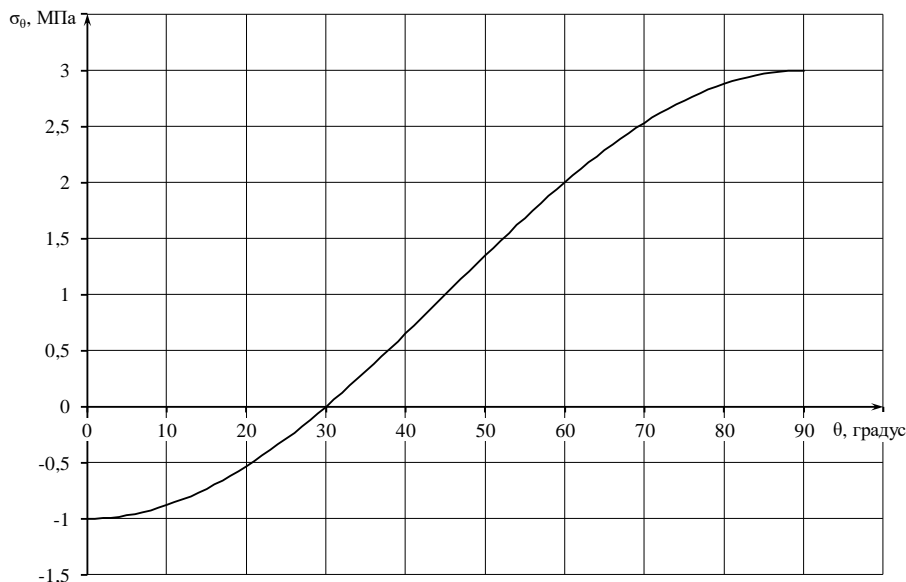


Рис. 8. Распределение нормальных напряжений в точках на контуре отверстия, по азимуту от 0° до 90°

Вычислим значения напряжений, действующих в точках *A*, *B* и *C*, воспользовавшись формулами (2)–(4). Учитывая, что в зоне концентратора напряжений возникает сложное напряжённое состояние, вычислим также значения главных и эквивалентных напряжений по теории фон Мизеса:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2},$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2},$$

где  $\sigma_r$  – нормальные радиальные напряжения, Па;  $\sigma_\theta$  – нормальные кольцевые напряжения, Па;  $\tau_{r\theta}$  – касательные напряжения, Па;  $\sigma_1$  – первые главные напряжения, Па;  $\sigma_2$  – вторые главные напряжения, Па;  $\sigma_{\text{экв}}$  – эквивалентные напряжения, Па.

Результаты расчёта представлены в табл. 2, из которой видно, что наибольший коэффициент концентрации напряжений при одноосном растяжении пластины появляется в точке *B*, расположенной на пересечении контура отверстия с осью *y*.

Напряжения, действующие в точках *A*, *B* и *C*

Напряжение	Единица	Точка <i>A</i>	Точка <i>B</i>	Точка <i>C</i>
$\sigma_r$	МПа	0,000	0,000	0,438
$\sigma_\theta$	МПа	-1,000	3,000	0,563
$\tau_{r\theta}$	МПа	0,000	0,000	0,602
$\sigma_1$	МПа	0,000	3,000	1,105
$\sigma_2$	МПа	-1,000	0,000	-0,105
$\sigma_{\text{экв}}$	МПа	1,000	3,000	1,161
$\alpha_\sigma$	—	-1,000	3,000	1,161

### 2.3. Построение дискретной (сеточной) модели

При численном конечно-элементном моделировании цельная конструкция аппроксимируется набором конечных элементов. Соответственно, для снижения времени расчёта целесообразно вводить допущения о симметрии дискретной модели. В данном случае пластина имеет две плоскости симметрии: *XZ* и *YZ*; т.е. можно рассмотреть одну четвертую пластины, ограниченную плоскостями *XZ* и *YZ*. Согласно расчётной схеме, представленной на рис. 9, в местах сечения модели плоскостями симметрии применяются условия симметрии (ограничение перемещений и поворотов, нормальных плоскости симметрии):

- на грани, лежащей в плоскости *XZ*, запрещаются перемещения по оси *Y* и повороты относительно оси *X* и *Z*;
- на грани, лежащей в плоскости *YZ*, запрещаются перемещения по оси *X* и повороты относительно оси *Y* и *Z*.

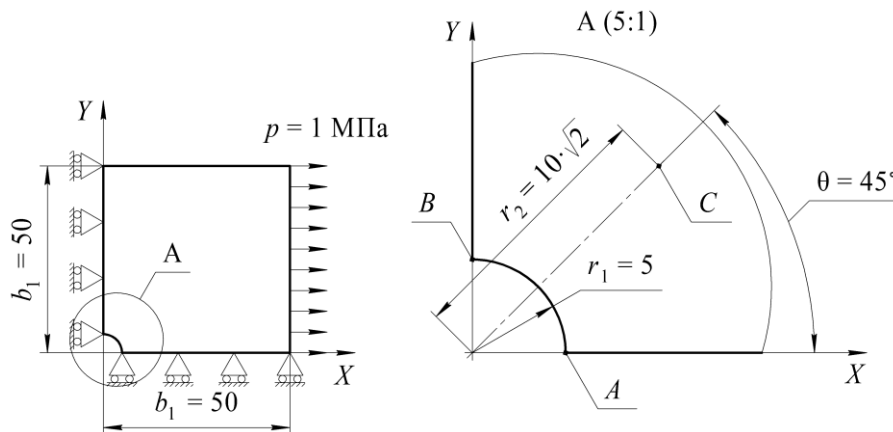


Рис. 9. Расчётная схема одноосного растяжения пластины, ослабленной круговым вырезом

На свободной невозмущённой грани, аналогично аналитической расчётной схеме, прикладывается растягивающая сила.

При построении дискретной модели рассматриваемой задачи необходимо помнить, что МКЭ – приближённый метод, точность которого зависит от правильного выбора типов и размеров конечных элементов. Очевидно, что чем меньше линейный размер конечного элемента, тем больше элементов присутствует в модели, при этом время вычислений экспоненциально возрастает, а погрешность анализа уменьшается. Однако погрешность уменьшается не до нуля, так как с увеличением числа элементов накапливаются ошибки округления при расчёте. Поэтому более частая сетка требуется там, где ожидается большой градиент деформаций или напряжений (например, в зонах концентрации напряжений), а грубая сетка может применяться в зонах с примерно постоянными деформациями или напряжениями, а также в областях, не представляющих особого интереса. В связи с этим инженер-расчётчик должен уметь предвидеть области концентрации напряжений.

Точность результатов анализа снижается тем больше, чем существеннее различия в размерах соседних элементов вблизи концентратора напряжений. Форма конечных элементов также влияет на точность вычислений. Элементы с примерно одинаковыми сторонами дают меньшую погрешность, поэтому следует избегать слишком узких и вытянутых конечных элементов.

Общую размерность задачи можно существенно уменьшить, если принять во внимание принцип Сен-Венана: две статически эквивалентные системы сил создают одно и то же поле напряжений на расстоянии от их точек приложения, большем, чем характерный линейный размер поперечного сечения.

Практика расчётов с применением МКЭ позволяет дать следующие рекомендации по использованию типов конечных элементов:

1. Линейные элементы требуют более частой сетки, чем квадратичные (с одним промежуточным узлом) или кубические (с двумя промежуточными узлами).

2. Упорядоченная сетка (рис. 10,б) является более предпочтительной, чем произвольная сетка (рис. 10,а).

3. Прямоугольная сетка с четырьмя узлами (рис. 10,в) более предпочтительна, чем с треугольными элементами (рис. 10,б).

4. Сетка треугольных элементов с промежуточными узлами (рис. 10,з) имеет примерно ту же точность, что и сетка прямоугольных элементов с четырьмя узлами (рис. 10,в).

5. Прямоугольная сетка с восемью узлами (рис. 10,д) более предпочтительна, чем сетка треугольных элементов с промежуточными узлами (рис. 10,з), несмотря на больший размер прямоугольных элементов.

6. Аппроксимация смещений кубическим полиномом (рис. 10,е) не требует более мелкой сетки.

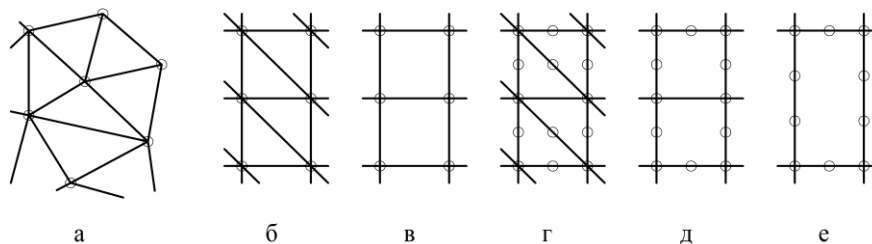


Рис. 10. Произвольные (а) и упорядоченные (б–е) конечно-элементные сетки: а – без промежуточных узлов; б – с треугольными элементами без промежуточных узлов; в – с прямоугольными элементами без промежуточных узлов; г – с треугольными элементами с одним промежуточным узлом; д – с прямоугольными элементами с одним промежуточным узлом; е – с прямоугольными элементами с двумя промежуточными узлами

Объектом исследования в рассматриваемой задаче является пластина с круговым вырезом. При построении дискретной модели пластину можно аппроксимировать набором либо твердотельных, либо оболочечных конечных элементов. При высокой степени дискретизации модели её аппроксимация твердотельными конечными элементами даст наибольшую точность решения. Однако выбор твердотельных элементов приведёт к существенному увеличению времени расчёта. Поэтому, учитывая, что длина и ширина рассматриваемой пластины много больше её толщины, для уменьшения времени расчёта можно принять допущение о сведении трёхмерного напряжённого состояния к плоскому и аппроксимировать пластину набором оболочечных конечных элементов.

Исходя из вышеизложенного моделью задачи Кирша будет являться четверть исходной пластины, представляющая собой плоскую поверхность с параметрически заданной толщиной, ограниченную плоскостями  $XZ$  и  $YZ$ , разделённую на пять областей для построения упорядоченной сетки с размерами, указанными на рис. 11.

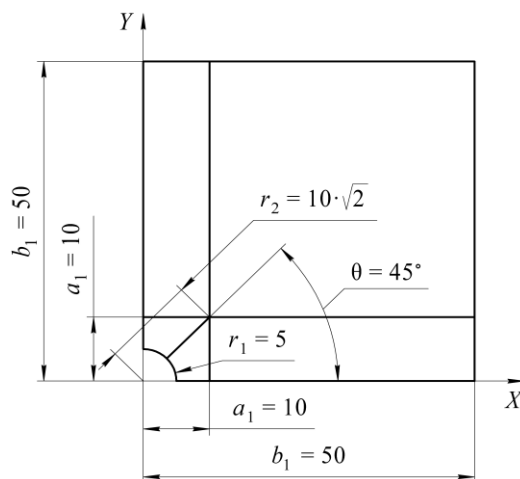


Рис. 11. Модель пластины с вырезом для численного расчёта

Для построения упорядоченной конечно-элементной сетки каждая линия разбивается на определённое число отрезков. Количество разбиений определяет размер элементов и подбирается таким образом, чтобы элементы являлись четырёхугольными с примерно одинаковыми сторонами, а сама сетка – упорядоченной. Параметры разбиения линий рассматриваемой модели представлены на рис. 12.

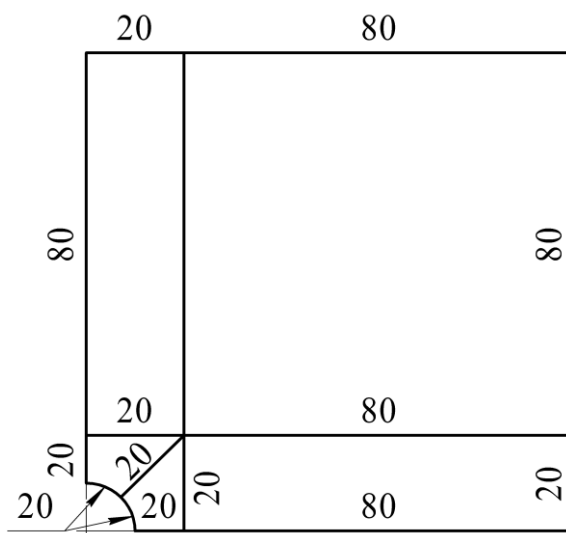


Рис. 12. Параметры разбиения линий

#### 2.4. Построение численной физической модели и решение задачи Кирша средствами ПО «Логос–Прочность»

В версии ПО «Логос–Прочность» 5.3.18 геометрическая и дискретная модели создаются в модуле «Логос–ГИБРИД», а непосредственно задача решается в модуле «Логос–Прочность».

Для создания новой модели необходимо выбрать в главном меню *Модель* → *Новая модель* → *Логос–ГИБРИД*.

В появившемся окне *Параметры расчётной задачи* выбрать режим запуска (последовательно на одном ядре центрального процессора (ЦП) или параллельно на нескольких ядрах ЦП), а также указать рабочую директорию, в которую будут сохраняться файлы результатов.

Для создания геометрической модели в панели управления выбрать раздел *Компоненты*, нажать на нём правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Создать компонент*. После этого в панели мастера выполнения операций ввести имя компонента.

В данной задаче зададим имя компонента – *Plate*. После этого в панели управления в разделе *Компоненты* появится выпадающий список, развернув который, можно будет увидеть только что созданный компонент *Plate*, после выделения которого справа от панели управления появится вспомогательная панель. Нажав на ней кнопку *Операции с геометрией*, начнём строить геометрическую модель. Для этого в появившемся на вспомогательной панели разделе *Геометрия* сначала создадим набор точек, воспользовавшись последовательно командами *Создание вершин* и *Создание вершины*. В появившейся панели мастера выполнения операций выберем способ задания точек *Точка по координатам* и последовательно зададим точки, координаты которых представлены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Координаты точек

Номер точки	Координата $x$	Координата $y$	Координата $z$
1	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,050	0,000
3	0,000	0,005	0,000
4	0,000	0,005	0,010

При создании геометрии и задании исходных данных необходимо помнить, что все величины должны быть в одной системе измерений, в данном случае – в системе СИ.

После создания точек необходимо построить по ним линии. Для этого на вспомогательной панели в разделе *Геометрия* выберем последовательно пункты *Создание рёбер* и *Создание ребра: по двум вершинам*, после чего соединим точки 1 и 2, а затем точки 3 и 4.

Приступим к созданию поверхностей. Для этого на вспомогательной панели в разделе *Геометрия* выберем последовательно пункты *Создание граней* и *Создание грани: протягиванием кривых*. В появившейся панели мастера выполнения операций выберем ребро, образованное точками 1 и 2, укажем тип протягивания *По направлению*, в поле *Направление* зададим в выпадающем списке вектор  $XС$ , и в поле *Расстояние протягивания* укажем величину 0,05. Четверть рассматриваемой пластины создана.

Теперь необходимо создать в ней центральный круговой вырез. Для этого на вспомогательной панели в разделе *Геометрия* выберем последовательно пункты *Создание граней* и *Создание грани: вращением кривых вокруг оси*. В появившейся панели мастера выполнения операций выберем ребро, образованное точками 3 и 4, в поле *Ось* зададим в выпадающем списке вектор  $ZС$  и в поле *Углы поворота* – начальный угол, равный  $0^\circ$ , и конечный, равный  $360^\circ$ . После этого на вспомога-

тельной панели в разделе *Геометрия* выберем последовательно пункты *Разрезание граней* и *Разрезание грани: гранью*. В появившейся панели мастера выполнения операций в поле *Грань* выберем квадратную поверхность пластины, а в поле *Режущие грани* – цилиндрическую поверхность, образованную точками 3 и 4. После этого на вспомогательной панели в разделе *Геометрия* выберем пункт *Удаление геометрических элементов*, в появившейся панели мастера выполнения операций в поле *Тип геометрических элементов* в выпадающем списке выберем пункт *Грани* и цилиндрическую поверхность, образованную точками 3 и 4, а также отсечённую часть пластины, соответствующую круговому вырезу.

Разделим пластину на пять областей для построения упорядоченной сетки. Для этого на вспомогательной панели в разделе *Геометрия* выберем последовательно пункты *Разрезание граней* и *Разрезание грани: плоскостью*. В появившейся панели мастера выполнения операций в поле *Грани* укажем поверхность пластины, в поле *Плоскость* в выпадающем списке выберем способ *Интерактивно* и рассечём поверхность пластины тремя плоскостями с параметрами, указанными в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Параметры секущих плоскостей

Номер плоскости	Координаты центра			Координаты нормали		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
1	0,00	0,01	0,00	0,00	1,00	0,00
2	0,01	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	1,00	-1,00	0,00

Для создания дискретной (сеточной) модели в панели управления в разделе *Компоненты* необходимо найти компонент *Plate*, после выделения которого справа от панели управления появится вспомогательная панель.

Нажав на ней кнопку *Операции с операцией*, начнём строить дискретную модель. Для этого в появившемся на вспомогательной панели разделе *Сетка* выберем последовательно пункты *Генерация поверхностной сетки* и *Построение поверхностной сетки*. В появившейся панели мастера выполнения операций выберем все пять областей пластины, в выпадающем списке *Тип сетки* выберем пункт *Четырёхугольная*, укажем размер разбиения 0,0005 и поставим галочку напротив пункта *Строить согласованную сетку*. Логос автоматически, на основании заданного размера элемента, сгенерирует параметры разбиения линий, показанные на рис. 13.

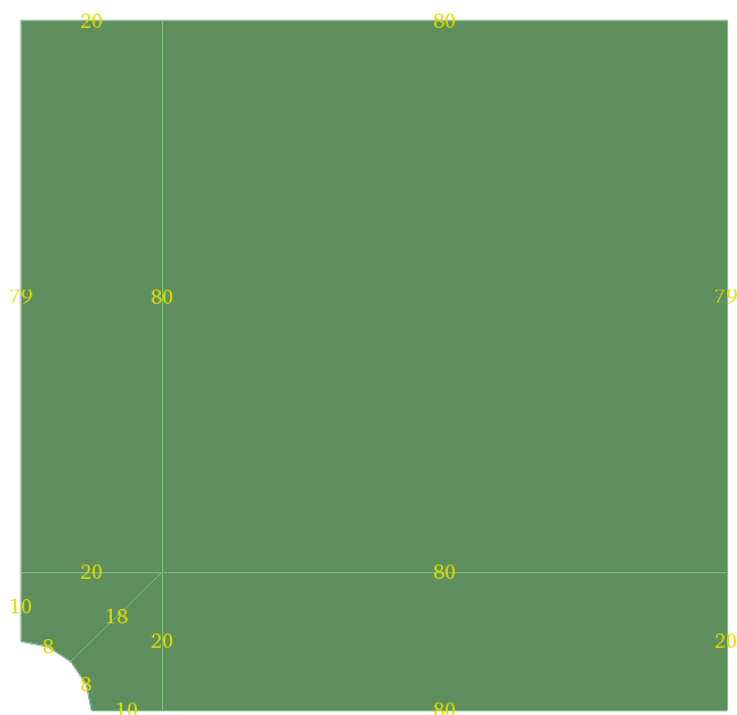


Рис. 13. Автоматически сгенерированные параметры разбиения линий

Как видно из рис. 13, автоматически сгенерированные параметры отличаются от тех, которые необходимы для построения упорядоченной сетки. Поэтому вручную переназначим разбиение линий в соответствии с рис. 12. Разбив модель на четырёхугольные элементы, получим упорядоченную конечно-элементную сетку со сгущением в области концентратора напряжений (рис. 14).

Для сохранения созданной конечно-элементной модели в главном меню выбрать *Модель* → *Сохранить* → *Сетку*. В появившемся окне задать имя файла сеточной модели *Plate* и выбрать тип файла *файлы сеток (\*.k)*.

Для создания новой модели в главном меню выбрать *Модель* → *Новая модель* → *Логос-Прочность*.

В появившемся окне *Параметры расчётной задачи* указать ту же рабочую директорию, в которую был сохранён файл *Plate.k*.

Для импорта сеточной модели в панели управления выбрать раздел *Детали*, нажать на нём правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Импортировать сетку*. В появившемся окне зайти в рабочую директорию и выбрать файл *Plate.k*. После этого в панели управления в разделе *Детали* появится раздел *Plate* с выпадающим списком, в котором содержатся два подкомпонента: *Сетка (k)* и *Геометрия*. Выбрав подкомпонент *Сетка (k)* и нажав на нём правой кнопкой мыши, в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Создать подобласти*.

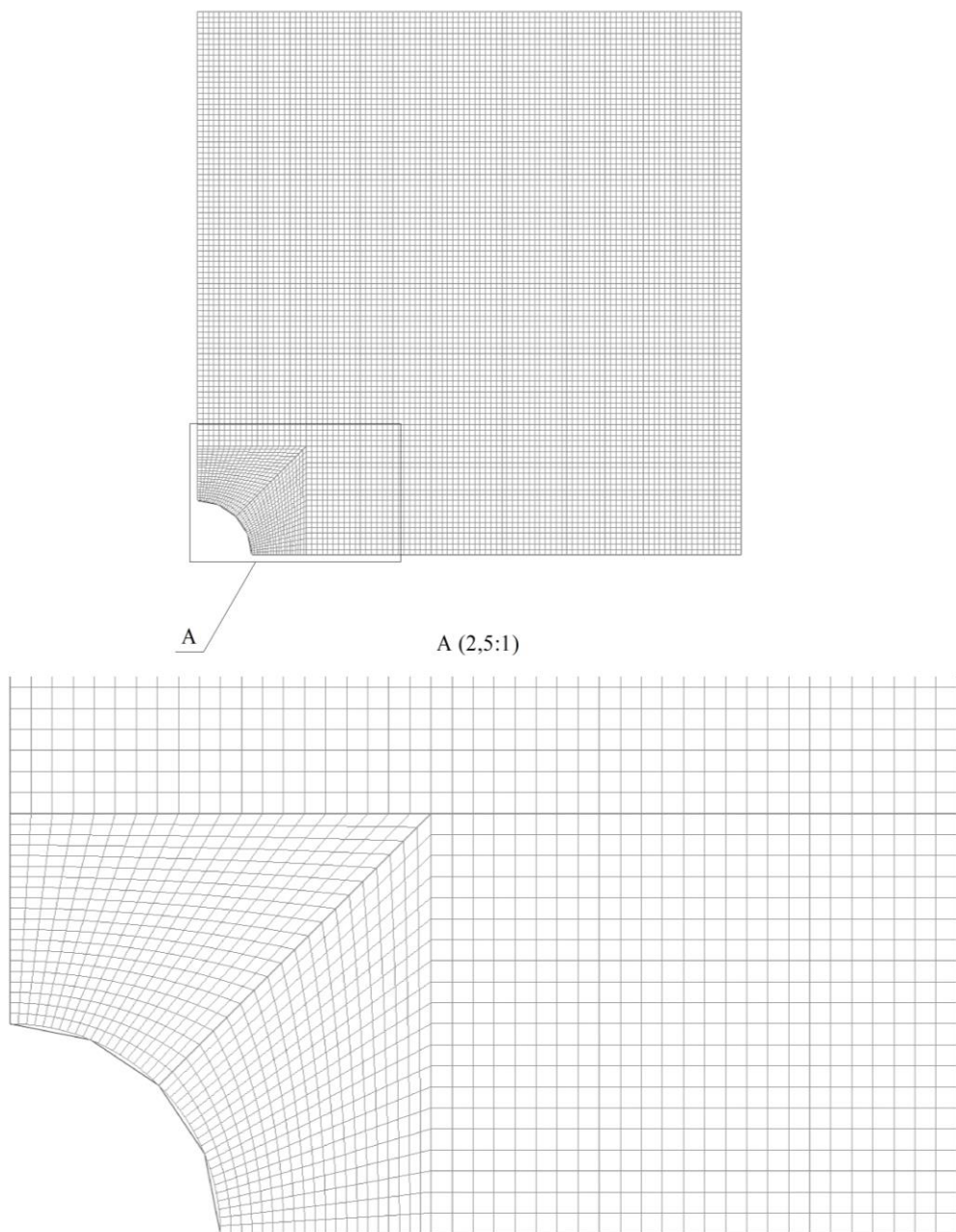


Рис. 14. Конечно-элементная сетка

В качестве материала пластины возьмём упругий изотропный материал, с физическими и механическими характеристиками, представленными в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

**Физические и механические свойства материала**

Наименование параметра	Единица	Значение
Плотность	кг/м <sup>3</sup>	7850
Модуль нормальной упругости (модуль Юнга)	Па	2·10 <sup>11</sup>
Коэффициент Пуассона	—	0,3

Для задания свойств материала в панели управления выбрать раздел *Материалы*, нажать на нём правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Добавить*. В дереве модели в разделе *Материалы* появится пункт *Материал\_1*. По двойному клику откроется окно задания свойств материала.

В поле *Имя материала* зададим наименование *Steel*. В поле *Доступные свойства*, развернув списки *Основные* и *Модели деформирования* → *Упругие* и поставив галочки напротив пунктов *Плотность* и *Изотропная*, зададим свойства, представленные в табл. 5.

Для задания параметров расчёта в панели управления выбрать раздел *Задача* и в мастере выполнения операций в графе *Тип расчёта* – пункт *Статическая прочность*.

Далее, после разворота раздела *Параметры счетных модулей* в панели управления и двойного клика по подразделу *Свойства подобласти* откроется окно *Свойства подобласти*. Сначала в области управления наборами необходимо создать набор данных, нажав кнопку *Добавить*. Далее в области для задания подобластей, входящих в набор, выделить подобласть *Plate* и добавить её к набору.

После этого в области задания параметров в поле *Материал* выберем ранее созданный материал *1 (Steel)*. В поле *Тип элемента* последовательно выберем *Оболочечный элемент*, *Универсальный*, *3-4 узл.* и зададим толщину, равную 0,001.

По двойному клику по подразделу *Статическая прочность* в разделе *Параметры счетных модулей* откроется окно *Статическая прочность*. Аналогично заданию параметров свойств подобласти, создадим новый набор и перенесём в него подобласть *Plate*. Остальные параметры оставим по умолчанию.

Далее, развернув раздел *Результаты* в панели управления и выбрав подраздел *Формат накоплений* в мастере выполнения операций, в графе *Формат* выберем пункт *EFR*.

Приложим к модели граничные условия, соответствующие расчётной схеме, представленной на рис. 9.

Сначала зададим наборы узлов, к которым впоследствии будут прикладываться граничные условия. Для этого в панели управления последовательно вы-

берем раздел *Наборы данных* и подраздел *Наборы узлов*. В мастере выполнения операций добавим три набора узлов, соответствующих растягивающей силе (назовём ее *Force*) и условиям симметрии (назовём их *UX* и *UY*), как показано на рис. 15. В каждом наборе должно содержаться по 101 узлу.

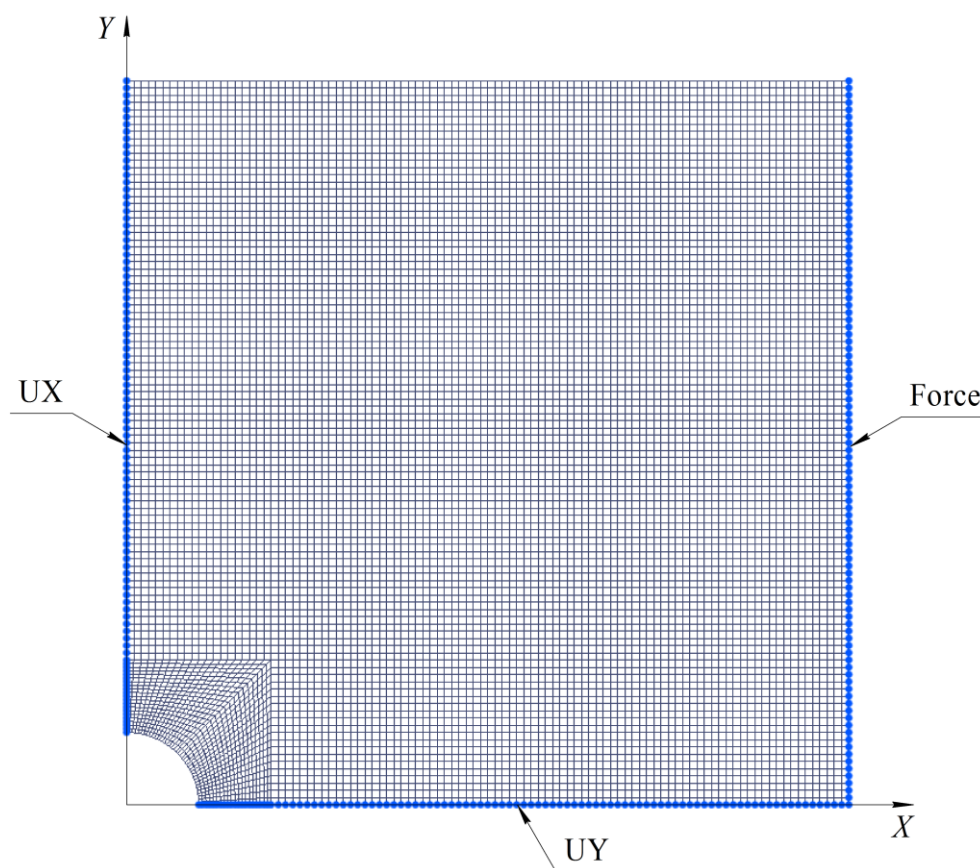


Рис. 15. Наборы узлов для задания граничных условий

Зададим нагрузки, действующие на пластину. В аналитической схеме к краю пластины было приложено растягивающее давление. В численной модели работа происходит с узлами конечно-элементной сетки, поэтому давление необходимо пересчитать в узловые силы, приложенные к каждому узлу набора.

Для задания нагрузки в панели управления последовательно выберем разделы *Нагрузки* → *Механика* → *Сила* → *Сила, приложенная к набору*. Нажав правой кнопкой по подразделу *Сила, приложенная к набору*, добавим один набор. В нём в поле *Набор узлов* выберем набор *Force*, в поле *Степень сво-*

боды – Нагрузка в направлении оси  $x$  и в поле Константа введём значение  $F$ , Н, равное:

$$F = \frac{p \cdot b_1 \cdot \delta}{n_{\text{узл}}} = \frac{10^6 \cdot (50 \cdot 10^{-3}) \cdot (1 \cdot 10^{-3})}{101} = 0,495,$$

где  $p$  – растягивающее давление, приложенное на стороне пластины, Па;  $b_1$  – половина ширины пластины, м;  $\delta$  – толщина пластины, м;  $n_{\text{узл}}$  – количество узлов на границе пластины.

Зададим условия симметрии на границах пластины. Для этого в панели управления последовательно выберем разделы *Граничные условия* → *Механика* → *Закрепления* → *Закрепления в наборах*. Нажав правой кнопкой по подразделу *Закрепления в наборах*, добавим два набора. В первом наборе в поле *Набор узлов* выберем набор *UX* и степени свободы, соответствующие отсутствию нормальных перемещений в плоскости симметрии *YZ*, а именно:

- «По *X*» (отсутствие перемещений вдоль оси *X*);
- «По *RY*» (отсутствие поворота относительно оси *Y*);
- «По *RZ*» (отсутствие поворота относительно оси *Z*).

Аналогично для второго набора выберем набор *UY* и степени свободы, соответствующие отсутствию нормальных перемещений в плоскости симметрии *XZ*, а именно:

- «По *Y*» (отсутствие перемещений вдоль оси *Y*);
- «По *RX*» (отсутствие поворота относительно оси *X*);
- «По *RZ*» (отсутствие поворота относительно оси *Z*).

Учитывая, что задача решается в трёхмерной постановке и при расчёте возникают численные ошибки, приводящие к возникновению узловых сил, нормальных плоскости пластины, дополнительно в каждом наборе закрепим модель от перемещений вдоль оси *Z*.

После задания всех параметров задачи перед запуском расчёта необходимо сохранить модель. Для этого в главном меню выберем *Модель* → *Сохранить* → *Модель*. В появившемся диалоговом окне *Выбор файла для экспорта модели* выберем рабочую папку и в поле *Имя файла* введём *Plate*. После этого запускаем расчёт нажатием кнопки *Запустить расчётную задачу* на панели инструментов.

## 2.5. Обработка и анализ полученных результатов

Просмотр результатов расчёта производится в отдельной программе *ScientificView*, для запуска которой необходимо нажать её иконку на панели инструментов, либо запустить через меню «Пуск».

Откроем файл результатов расчёта в ScientificView. Для этого в главном меню программы нажмём *Файл* → *Открыть* и в появившемся окне *Открыть* укажем путь до папки, в которой находится файл с результатами первого шага нагружения: ...\*Plate*\*Plate.RESULTS*\*EFR\_CUT*\*Plate\_001*\. Выберем файл с результатами расчёта: *Plate\_001.efr*.

ПО «Логос–Прочность» сохраняет файлы результатов в формате \*.efr в папке с именем модели. Каждому шагу нагружения соответствует отдельная папка, имя которой заканчивается номером шага. Открывать всегда следует первый шаг.

Для просмотра результатов расчёта в окне информации необходимо перейти на рассматриваемый шаг (в данном случае – второй) при помощи кнопки «Перейти к следующему временному шагу».

Отобразим поля напряжений, действующих в пластине. Для этого на панели отображения выставим отображение величин в узлах, выберем требуемую отображаемую величину, систему координат и ось. Параметры, задаваемые при выводе полей напряжений, представлены в табл. 6, результаты – на рис. 16–19.

Т а б л и ц а 6

Параметры отображения напряжений

Напряжения	Система координат	Отображаемая величина	Ось
Тангенциальные	Глобальная цилиндрическая	<i>NodeStress_X</i>	<i>YY</i>
Радиальные	Глобальная цилиндрическая	<i>NodeStress_X</i>	<i>XX</i>
Касательные	Глобальная цилиндрическая	<i>NodeStress_X</i>	<i>XY</i>
Эквивалентные	Глобальная декартова	<i>Nd_VnMisStress</i>	—

Из рис. 16–19 видно следующее:

1. Максимальные и минимальные кольцевые напряжения образовались на пересечении контура выреза с осями *Y* и *X* соответственно.
2. Радиальные и касательные напряжения на контуре выреза отсутствуют.
3. Минимальные эквивалентные напряжения образуются на контуре выреза в месте смены знака кольцевых напряжений.
4. На границе, к которой была приложена сила растяжения, в районе углов пластины образовались области, в которых градиент поля напряжений резко возрастает. Это объясняется возникающим краевым эффектом вблизи граничных условий. Для повышения точности расчёта необходимо, в соответствии с принципом Сен-Венана, удалять места приложения граничных условий от рассматриваемой области.

Met LOGOS Time: 1.000000 сек Array: NodeStress\_X\_system\_cylinder Min/max: -1.071408e+006 : 3.113894e+006

40

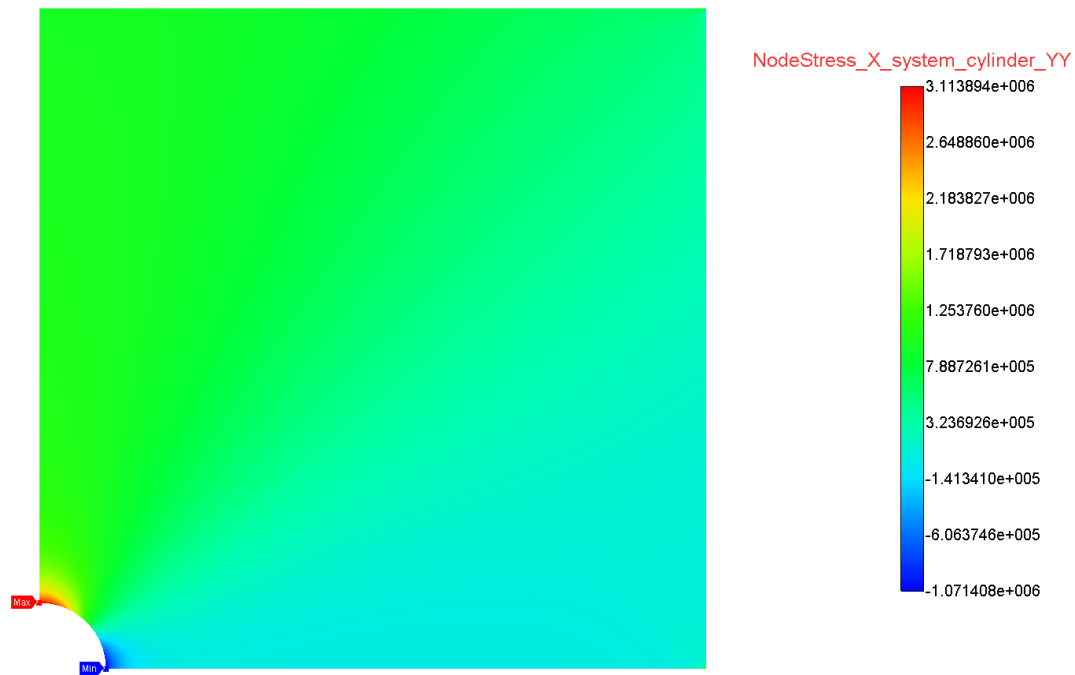


Рис. 16. Тангенциальные напряжения (Па) в пластине

Met LOGOS Time:1.000000 сек Array:NodeStress\_X\_system\_cylinder Min/max:-6.188422e+004 : 2.200358e+006

41

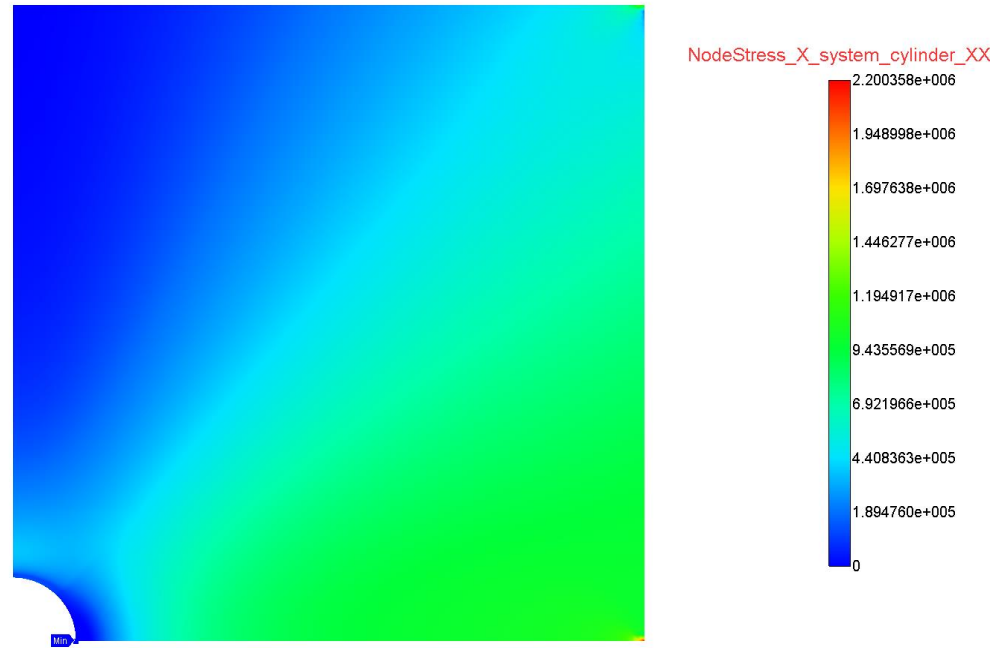


Рис. 17. Радиальные напряжения (Па) в пластине

Met: LOGOS Time: 1.000000 сек Array: NodeStress\_X\_system\_cylinder Min/max: -1.170632e+006 : 5.391810e+004

42

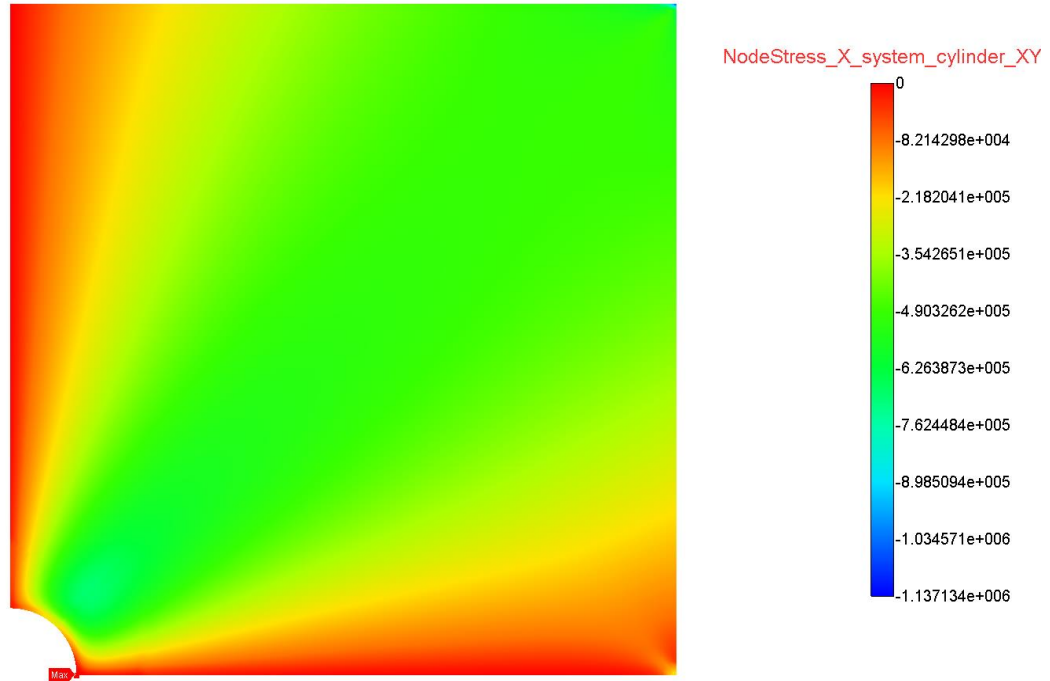


Рис. 18. Касательные напряжения (Па) в пластине

Met: LOGOS Time: 1.000000 сек Array: Nd\_VnMisStress Min/max: 1.964460e+005 : 3.052068e+006

43

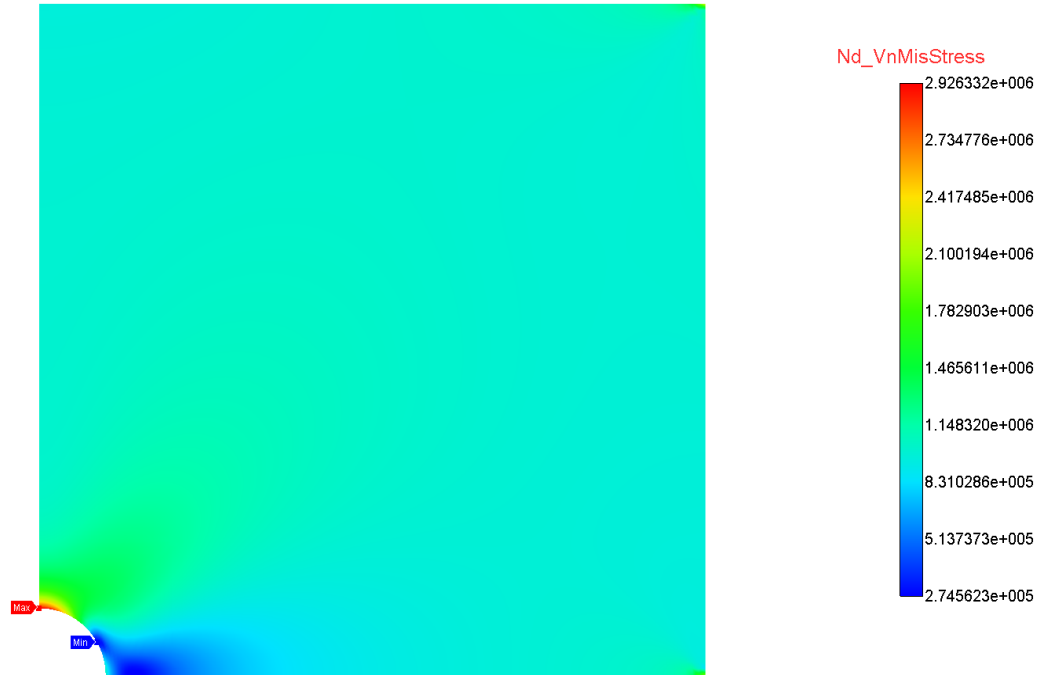


Рис. 19. Эквивалентные напряжения (Па) в пластине

## 2.6. Верификация компьютерных моделей на примере решённой задачи

Для простоты сравнения результатов аналитического и численного расчётов выберем эквивалентные напряжения по Мизесу, которые инварианты для любой системы координат.

Согласно ст. 3.30 ГОСТ Р 57700.10 точность (в процентах) численного расчёта относительно аналитического определяется как

$$\bar{\Delta} = \frac{\sigma_{\text{экв,а}} - \sigma_{\text{экв,ч}}}{\sigma_{\text{экв,а}}} \cdot 100,$$

где  $\sigma_{\text{экв,а}}$  – эквивалентные напряжения по Мизесу, полученные аналитическим расчётом, Па;  $\sigma_{\text{экв,ч}}$  – эквивалентные напряжения по Мизесу, полученные численным расчётом, Па; Сравнение результатов аналитического и численного расчётов представлено в табл. 7.

Т а б л и ц а 7

Результаты верификации

Расчёт	Обозначение	Единицы	A	B	C
Аналитический расчёт	$\sigma_{\text{экв,а}}$	МПа	1,000	3,000	1,161
Численный расчёт	$\sigma_{\text{экв,ч}}$	МПа	1,046	3,052	1,188
Точность	$\bar{\Delta}$	%	4,600	1,733	2,273

Как видно из табл. 7, максимальное относительное отклонение численного расчёта составило 4,6 % относительно аналитического.

На точность решения данной задачи оказали влияние следующие факторы:

- малое количество конечных элементов в модели (10400);
- первый порядок конечных элементов;
- вывод напряжений в узлах, а не в элементах;
- общая погрешность численных методов.

Исходя из вышеперечисленного, можно сделать вывод о приемлемой точности решения.

## 2.7. Влияние линейного размера конечного элемента на результаты решения задач

Исследуем влияние линейного размера конечного элемента на точность результата согласно ст. 5.4.3 ГОСТ Р 57700.10. Для этого построим более грубую сетку, уменьшив в два раза относительно рис. 12, число разбиений на линиях модели (получив 2600 элементов), и более точную, увеличив число разбиений в два раза (получив 41600 элементов). Сравнение эквивалентных напряжений, действующих в точках A, B и C, полученных путём аналитического и численного расчётов, представлено в табл. 8.

Т а б л и ц а 8

## Результаты сравнения

Расчёт	Обозначение	Единица	Сетка	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
Аналитический	$\sigma_{\text{экв,а}}$	МПа	—	1,000	3,000	1,161
Численный	$\sigma_{\text{экв,ч}}$	МПа	Грубая	1,020	3,011	1,179
			Средняя	1,046	3,052	1,188
			Точная	1,059	3,072	1,193
Точность	$\bar{\Delta}$	%	Грубая	2,000	0,367	1,550
			Средняя	4,600	1,733	2,273
			Точная	5,900	2,400	2,756

Обычно при уменьшении линейного размера конечного элемента погрешность анализа снижается, хотя и не до нуля, так как с увеличением числа элементов накапливаются ошибки округления при расчёте. Однако, как видно из табл. 8, в данном случае при уменьшении линейного размера конечного элемента погрешность расчёта только возрастает. Это связано с тем, что данная задача решалась в рамках линейной теории упругости, основными допущениями которой являются малость перемещений, малость деформаций, принцип независимости действия сил.

Эти положения изначально закладывают погрешность в расчёты, в том числе и в аналитические решения. В местах резкого изменения геометрии (выемки, углы) точные решения линейной теории упругости дают бесконечные значения перемещений (сингулярность). Конечно-элементные решения с сингулярностью не работают, за исключением ограниченного класса задач, где перемещения конечны, но сингулярными являются производные от перемещений (деформации) и для решения можно применить элементы со специальными функциями формы. Обычно в данном случае рекомендуется сгущение расчётной сетки в местах с резким изменением геометрии. Однако на практике получается, что чем больше сгущается сетка, тем выше получаемый уровень напряжений, что приводит к бессмысленной трате времени и машинных ресурсов, так как к бесконечности приблизиться нельзя. Проблему можно обойти несколькими путями:

1) задать реальную геометрию (с наличием плавных переходов, скруглений, фасок и т.п.);

2) решить задачу в рамках нелинейной теории упругости (с учётом больших перемещений и реальной диаграммы деформирования материала).

В первом случае получаются хотя и большие, но конечные напряжения. Во втором же случае получается решение, наиболее приближенное к реальности, но на его получение затрачивается намного больше времени и машинных ресурсов.

### 3. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ИЗВЕСТНЫМ ЧИСЛЕННЫМ РЕШЕНИЕМ

Эмпирической зависимостью называется математическое уравнение, полученное опытным путём, методом проб и ошибок или как приближённая формула из экспериментальных данных.

Зачастую размерности используемых и вычисляемых в эмпирической формуле величин не соответствуют друг другу. Другой характерной особенностью является наличие эмпирических коэффициентов – специально подобранных параметров эмпирической формулы. Подобные зависимости также могут являться простым аналогом более сложного точного теоретического соотношения.

В строительной механике эмпирические зависимости получили наибольшее распространение при решении задач устойчивости конструкций, особенно подкреплённых криволинейных оболочек. Это связано с тем, что устойчивость конструкций очень чувствительна к начальным несовершенствам (локальным прогибам, переменной толщине, овальности контура и т.д.), возникающим при их изготовлении, и неравномерности приложенной нагрузки. Поэтому зависимости, полученные путём теоретических изысканий, дают завышенные критические усилия потери устойчивости, по сравнению с реальностью.

#### 3.1. Задача об изгибе консольной балки

Рассмотрим задачу об изгибе консольной балки квадратного сечения под действием изгибающего момента на конце:

$$M = f \cdot \frac{\pi \cdot E \cdot I}{L}, \quad (5)$$

где  $M$  – изгибающий момент,  $lb \cdot in$ ;  $f$  – параметр нагрузки;  $E$  – нормальный модуль упругости (модуль Юнга) материала,  $lb/in^2$ ;  $I$  – поперечный момент инерции сечения балки,  $in^4$ :  $I = h \cdot b^3 / 12$ ,  $h$  – ширина балки,  $in$ ;  $b$  – высота балки,  $in$ ;  $L$  – длина балки,  $in$ .

Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 9, расчётная схема – на рис. 20.

Т а б л и ц а 9

Исходные данные

Наименование	Обозначение	Единица	Значение
Модуль Юнга	$E$	$lb/in^2$	$30 \cdot 10^6$
Коэффициент Пуассона	$\mu$	—	0
Параметр нагрузки	$f$	—	0...2
Длина	$L$	$in$	12
Высота	$b$	$in$	1
Ширина	$h$	$in$	1

Балка деформируется по дуге окружности, причём каждой величине параметра  $f$  соответствует угол сектора, равный

$$\varphi = f \cdot \pi. \quad (6)$$

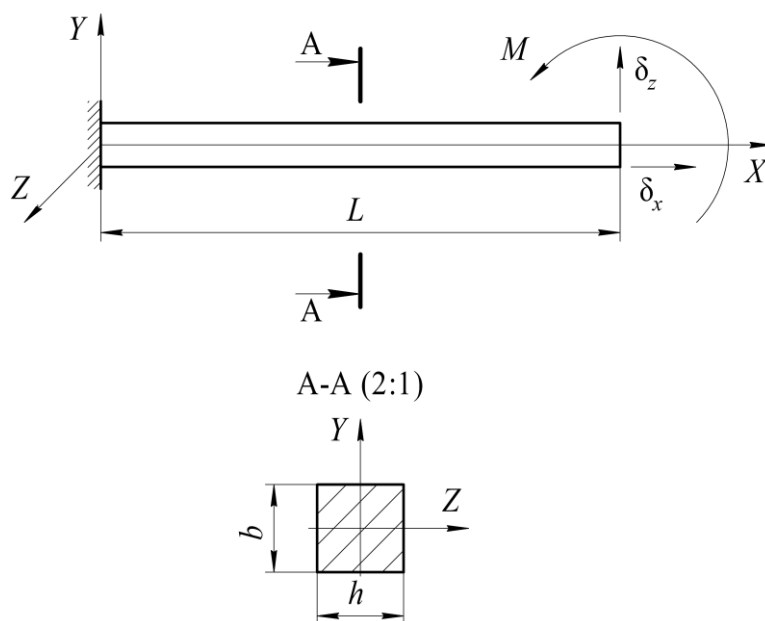


Рис. 20. Расчётная схема консольной балки

Результаты представлены в табл. 10.

Т а б л и ц а 10

Перемещения свободного конца балки

Параметр $f$	$\delta_x$	$\delta_y$
0,2	-0,76523	-3,62328
0,4	-2,89947	-6,57447
0,6	-5,95519	-8,32848
0,8	-9,29273	-8,61971
1,0	-12,21500	-7,50693
1,2	-14,12230	-5,37612
1,4	-14,66210	-2,87708
1,6	-13,85440	-0,79721
1,8	-12,18030	0,12317

### 3.2. Построение дискретной (сеточной) модели

Определим параметры дискретной модели, учитывая особенности её построения и расчётную схему.

Балка, рассмотренная выше, имеет следующие особенности:

- длина намного больше высоты и ширины;
- она работает на изгиб;
- свободный конец балки совершает большие перемещения.

Поэтому для снижения временных затрат и машинных ресурсов аппроксимируем рассматриваемую модель набором балочных элементов.

Учитывая вышеперечисленное, дискретная модель консольной балки будет представлять собой набор балочных конечных элементов постоянного сечения со следующими граничными условиями:

- жёсткая заделка (ограничение всех возможных перемещений) на одном конце;
- изгибающий момент на противоположном конце.

Задача будет решаться в геометрически нелинейной постановке с учётом больших перемещений.

### 3.3. Построение численной физической модели и решение задачи средствами ПО «Логос–Прочность»

**Создание геометрической модели.** В версии ПО «Логос–Прочность» 5.3.18 геометрическая и дискретная модель создаются в модуле «Логос–ГИБРИД», а непосредственно задача решается в модуле «Логос–Прочность».

Для создания новой модели необходимо в главном меню выбрать *Модель* → *Новая модель* → *Логос–ГИБРИД*.

В появившемся окне *Параметры расчётной задачи* выбрать режим запуска (последовательно на одном ядре ЦП или параллельно на нескольких ядрах ЦП), а также указать рабочую директорию, в которую будут сохраняться файлы результатов.

Для создания геометрической модели в панели управления выбрать раздел *Компоненты*, нажать на нём правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню пункт *Создать компонент*. После этого в панели мастера выполнения операций ввести имя компонента.

В данной задаче зададим имя компонента – *Console*. После этого в панели управления в разделе *Компоненты* появится выпадающий список, развернув который, можно увидеть только что созданный компонент *Console*, после выделения которого справа от панели управления появится вспомогательная панель. Нажав на ней кнопку *Операции с геометрией* начнём строить геометрическую модель. Для этого в появившемся на вспомогательной панели разделе *Геометрия* сначала создадим набор точек, воспользовавшись последовательно командами *Создание вершин* и *Создание вершины*. В появившейся панели мастера выполне-

ния операций выберем способ задания точек *Точка по координатам* и последовательно зададим точки, координаты которых представлены в табл. 11.

Т а б л и ц а 11

Координаты точек

Номер точки	Координата $x$	Координата $y$	Координата $z$
1	0	0	0
2	12	0	0

При создании геометрии и задании исходных данных необходимо помнить, что все величины должны быть в одной системе измерений. Учитывая, что в примере использовалась имперская система, для корректности сравнения в текущей задаче будем также придерживаться данной системы измерений.

После создания точек необходимо построить по ним линии. Для этого на вспомогательной панели в разделе *Геометрия* выберем последовательно пункты *Создание рёбер* и *Создание ребра: по двум вершинам*, после чего соединим точки 1 и 2.

**Создание дискретной модели средствами.** Для создания дискретной (сеточной) модели в панели управления в разделе *Компоненты* найти компонент *Console*, после выделения которого справа от панели управления появится вспомогательная панель. Нажав на ней кнопку *Операции с геометрией*, начнём строить дискретную модель. Для этого в появившемся на вспомогательной панели разделе *Сетка* выберем последовательно пункты *Генерация 1d сетки* и *Построение 1D сетки*. В появившейся панели мастера выполнения операций выберем построенную линию балки, в выпадающем списке *Вид распределения* – пункт *Равномерная* и укажем число разбиений – 32.

В ПО «Логос–Прочность» версии 5.3.18 отсутствуют балочные конечные элементы второго порядка, поэтому, учитывая особенности построения сеток, для достижения аналогичной точности необходимо увеличить количество элементов в два-четыре раза. При этом, учитывая нелинейную постановку задачи, количество элементов первого порядка желательно увеличить в большее число раз.

**Сохранение конечно-элементной модели и переход к решению задачи.** Для сохранения созданной конечно-элементной модели в главном меню выбрать *Модель* → *Сохранить* → *Сетку*. В появившемся окне задать имя файла сеточной модели *Console* и выбрать тип файла «файлы сеток (\*.k)».

Для создания новой модели в главном меню выбрать *Модель* → *Новая модель* → *Логос–Прочность*.

В появившемся окне *Параметры расчётной задачи* указать ту же рабочую директорию, в которую был сохранён файл *Console.k*.

Для импорта сеточной модели в панели управления выбрать раздел *Детали*, нажать на нём правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Импортировать сетку*. В появившемся окне зайти в рабочую дирек-

торию и выбрать файл *Console.k*. После этого в панели управления в разделе *Детали* появится раздел *Console* с выпадающим списком, в котором содержатся два подкомпонента: *Сетка (k)* и *Геометрия*. Выбрав подкомпонент *Сетка (k)* и нажав на нём правой кнопкой мыши, в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Создать подобласти*.

В качестве материала балки возьмём упругий изотропный материал, с механическими характеристиками, представленными в табл. 9.

Для задания свойств материала в панели управления выберем раздел *Материалы*, нажав на нём правой кнопкой мыши, и в появившемся контекстном меню выберем пункт *Добавить*. В дереве модели в разделе *Материалы* появится пункт *Материал\_1*. По двойному клику откроется окно задания свойств материала.

В поле *Имя материала* зададим наименование *Material*. В поле *Доступные свойства*, развернув список *Модели деформирования* → *Упругие* и поставив галочку напротив пункта *Изотропная*, зададим свойства, представленные в табл. 9.

Для задания параметров расчёта в панели управления выберем раздел *Задача* и в мастере выполнения операций в графе *Тип расчёта* – пункт *Статическая прочность*.

Развернем раздел *Параметры счётных модулей* в панели управления и дважды кликнем по подразделу *Свойства подобласти*. Откроется окно *Свойства подобласти*. Сначала в области управления наборами создадим набор данных, нажав кнопку *Добавить*. Далее в области для задания подобластей, входящих в набор, выделим подобласть *Console* и добавим её к набору. После этого в области задания параметров в поле *Материал* выберем ранее созданный материал *1 (Material)*. В поле *Тип элемента* последовательно выберем *Балочный элемент* и *Балка, модифиц., 2 узл.* Далее зададим ориентацию балочных элементов. Учитывая, что балка изгибается в плоскости *XУ*, нормалью ей будет являться ось *Z*. Поэтому поставим галочку в поле *Ориентация*, выберем пункт *Задана вектором* и зададим вектор нормали (0; 0; 1). После этого зададим параметры сечения балки. В окне *Свойства подобласти* нажмем кнопку *Параметры сечения*, в появившемся окне *Параметры сечения балки* в списке *Тип сечения* выберем *BAR* (т.е. сплошное прямоугольное сечение) и зададим размеры, представленные в табл. 12.

Т а б л и ц а 12

Размеры поперечного сечения балки

Наименование	Обозначение	Единица	Значение
Высота	$b$	$in$	1
Ширина	$h$	$in$	1

ПО «Логос–Прочность» автоматически рассчитывает площадь поперечного сечения и его моменты инерции. Однако в рассматриваемой расчётной схеме изгиб идёт относительно оси *Z*, а в ПО «Логос–Прочность» по умолчанию считается, что балка изгибается относительно оси *X* или *У*. Поэтому в поле *Момент инерции Izz* необходимо вручную ввести значение, равное 0,0833333.

Совершим двойной клик по подразделу *Статическая прочность* в разделе *Параметры счётных модулей*. Откроется окно *Статическая прочность*. Аналогично заданию параметров свойств подобласти создадим новый набор и перенесём в него подобласть *Console*. В поле *Подшаги по нагрузке* оставим параметр по умолчанию *Автоматическое регулирование* и введём параметры, представленные в табл. 13.

Т а б л и ц а 13

Параметры подшагов по нагрузке

Наименование	Значение
Начальный	0,05
Минимальный	1e-005
Максимальный	0,05

Задав эти параметры, ограничим минимальное количество шагов равным 20, для наилучшей сходимости итераций и корректного сравнения с результатами, представленными выше. При этом в том случае, если расчёт на каких-либо шагах не будет сходиться, ПО «Логос–Прочность» автоматически уменьшит данные шаги для обеспечения сходимости расчёта.

Развернув подраздел *Статическая прочность* и сделав двойной клик по подразделу *Нелинейность*, включим учёт больших перемещений. Для этого в появившемся окне *Нелинейность* поставим галочку *Геометрическая нелинейность*.

Развернув раздел *Результаты* в панели управления и выбрав подраздел *Формат накоплений* в мастере выполнения операций, в графе *Формат* выберем пункт *EFR*.

Приложим к модели граничные условия, соответствующие расчётной схеме, представленной на рис. 20.

В рассматриваемой постановке задачи расчёт необходимо производить в несколько шагов с последовательным увеличением приложенной силы. Поэтому зададим нагрузку в виде прямой, монотонно возрастающей от нуля до действующего значения. Для этого в панели управления последовательно выберем разделы *Функциональные зависимости* → *Кривые*. Нажав правой кнопкой по подразделу *Кривые*, добавим один набор и назовём его *Moment*. Раскрыв созданный набор в мастере выполнения операций, создадим прямую по двум точкам с координатами, приведенными в табл. 14, определёнными согласно выражению (5) при подстановке  $f = 2$ .

Т а б л и ц а 14

Координаты прямой, задающей момент

Абсцисса	Ордината
0	0
1	-1308996,939

Для приложения нагрузки к модели в панели управления последовательно выберем разделы *Нагрузки* → *Механика* → *Сила* → *Сила, приложенная к узлу*. Нажав правой кнопкой по подразделу *Сила, приложенная к узлу*, добавим один набор. В нём в поле *Идентификатор узла* выберем узел на свободном конце балки, в поле *Степень свободы* – *Нагрузка в направлении оси z*, в поле *Тип* – пункт *Кривая* и в поле *Кривая* – созданную ранее кривую *Moment*.

Для задания жёсткой заделки в панели управления последовательно выберем разделы *Граничные условия* → *Механика* → *Закрепления* → *Закрепления в узлах*. Нажав правой кнопкой по подразделу *Закрепления в узлах*, добавим один набор. В нём в поле *Идентификатор узла* выберем закрепляемый узел и степени свободы, соответствующие отсутствию всех перемещений, а именно:

- «По X» (отсутствие перемещений вдоль оси X);
- «По Y» (отсутствие перемещений вдоль оси Y);
- «По Z» (отсутствие перемещений вдоль оси Z);
- «По RY» (отсутствие поворота относительно оси X);
- «По RX» (отсутствие поворота относительно оси Y);
- «По RZ» (отсутствие поворота относительно оси Z).

После задания всех параметров задачи, перед запуском расчёта необходимо сохранить модель. Для этого в главном меню выберем *Модель* → *Сохранить* → *Модель*. В появившемся диалоговом окне *Выбор файла для экспорта модели* выберем рабочую папку и в поле *Имя файла* введем *Console*. После этого запускаем расчёт нажатием кнопки *Запустить расчётную задачу* на панели инструментов.

### 3.4. Обработка и анализ полученных результатов

Просмотр результатов расчёта производится в отдельной программе *ScientificView*, для запуска которой необходимо нажать её иконку на панели инструментов либо запустить через меню «Пуск».

Откроем файл результатов расчёта в *ScientificView*. Для этого в главном меню программы нажмём *Файл* → *Открыть* и в появившемся окне укажем путь до папки, в которой находится файл с результатами первого шага нагружения: *...\Console\Console.RESULTS\EFR\_CUT\Console\_001*. После чего выберем файл с результатами расчёта: *Console\_001.efr*.

ПО «Логос–Прочность» сохраняет файлы результатов в формате \*.efr в папке с именем модели. Каждому шагу нагружения соответствует отдельная папка, имя которой заканчивается номером шага. Открывать всегда следует первый шаг.

Для просмотра результатов расчёта в окне информации необходимо перейти на рассматриваемый шаг при помощи кнопки *Перейти к следующему временному шагу*.

Отобразим поля перемещений по осям X и Y, возникших в балке. Для этого на панели отображения выставим отображение величин в узлах, и выберем требуемую отображаемую величину. Параметры, задаваемые при выводе полей перемещений, представлены в табл. 15, результаты расчёта для последнего шага – на рис. 21–22.

### Параметры отображения перемещений

Перемещения	Отображаемая величина
По оси $X$	$Displ\_X$
По оси $Y$	$Displ\_Y$
Суммарные	$Displ\_Result$

Met LOGOS Time: 1.000000 сек Array: Displ\_X Min/max: -1.199957e+001 : 0.000000e+000



Рис. 21. Поле перемещений в балке по оси  $X$  (м)

Met LOGOS Time: 1.000000 сек Array: Displ\_Y Min/max: -3.825863e+000 : 1.510343e-004



Рис. 22. Поле перемещений в балке по оси  $Y$  (м)

Из рис. 21, 22 видно, что при максимальном значении изгибающего момента консольная балка сворачивается в круг, что согласуется с зависимостью (6).

### 3.5. Влияние линейного размера конечного элемента на результаты решения задач

Исследуем влияние линейного размера конечного элемента на точность результата согласно ст. 5.4.3 ГОСТ Р 57700.10. Для этого построим более грубую сетку, уменьшив в два раза число разбиений на линии балки (16 элементов), и более точную, увеличив число разбиений в два раза (64 элемента).

Точность (в процентах) численного расчёта на каждом шаге дробления сетки, определяется как

$$\bar{\Delta} = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{\delta_i} \cdot 100,$$

где  $\delta_i$  – суммарное перемещение свободного края балки на более точной сетке;  $\delta_{i-1}$  – суммарное перемещение свободного края балки на менее точной сетке.

Сравнение суммарных перемещений свободного края балки на последнем шаге для различных сеток представлено в табл. 16.

Т а б л и ц а 16

Результаты сеточной сходимости

Количество КЭ	Суммарное перемещение, $\delta$ , in	Точность, $\bar{\Delta}$ , %
16	11,99958138762540	—
32	11,99956760352030	$-1,149 \cdot 10^{-4}$
64	11,99956403648630	$-2,973 \cdot 10^{-5}$

Как видно из табл. 16, в рассмотренной задаче даже при 16 элементах в модели был достигнут результат с высокой степенью достоверности.

### 3.6. Верификация компьютерных моделей на примере решённой задачи

Сравнение перемещений по осям  $X$  и  $Y$  для параметра  $f$ , изменяющегося в диапазоне от 0 до 2, полученных в эксперименте и в численном расчёте, представлено на рис. 23.

Как видно из рис. 23, выполненный расчёт практически идеально совпадает с результатами эксперимента в области малых перемещений при значениях параметра  $f$  меньше 0,6. При дальнейшем увеличении изгибающего момента начинается возрастающее расхождение результатов, которое возникает из-за несовершенства конечно-элементной модели, состоящей всего из четырёх элементов, что и дало снижение точности в области больших перемещений.

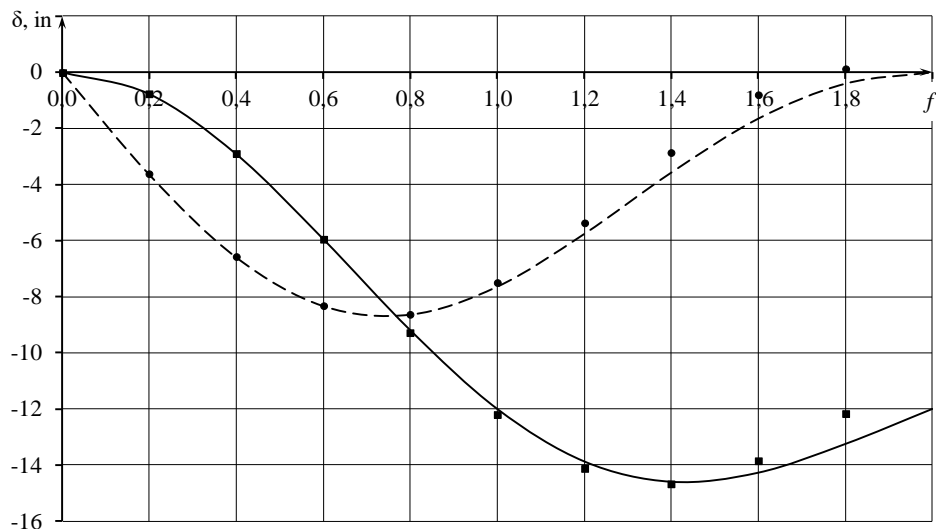


Рис. 23. Результаты верификации: ■ – перемещение по оси  $X$  (эксперимент); ● – перемещение по оси  $Y$  (эксперимент); — – перемещение по оси  $X$  (расчет); - - - – перемещение по оси  $Y$  (расчет)

#### 4. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Отличительной особенностью прикладных задач является то, что в них рассматриваются элементы подвижных механизмов, находящихся в сложном напряжённом состоянии под воздействием комбинации различных нагрузок, в том числе и нагрузок от набегающего потока, неравномерно распределённых по поверхности и полученных из гидродинамического расчёта обтекания объекта.

Для решения подобных задач разработаны различные аналитические методики. Однако зачастую они имеют узкие границы применимости и созданы либо по эмпирическим зависимостям, либо с применением большого количества допущений и существенной декомпозиции модели, сильно снижающих точность получаемых результатов и не позволяющих оценить локальные эффекты от тех или иных конструктивных решений.

Для получения более достоверных расчётных результатов необходимо рассматривать конструкции как комплекс взаимосвязанных между собой элементов, находящихся в сложном напряжённом состоянии и, желательно, в геометрически и физически нелинейной постановке. Однако никогда нельзя сразу, «в лоб», решить сложную задачу. Любой расчёт должен проходить в несколько итераций, постепенно переходя от простой постановки с большим числом допущений к более полной. Рассмотрим один из примеров решения прикладной задачи в относительно упрощённой постановке.

#### 4.1. Задача о нагружении обтекателя пусковой установки

Требуется определить напряжённо-деформированное состояние обтекателя пусковой установки (ПУ) в закрытом положении при действии перепада давления  $\Delta p$  между междубортным и забортным пространством 0,01 МПа.

Твёрдотельная электронная геометрическая модель ПУ представлена на рис. 24.

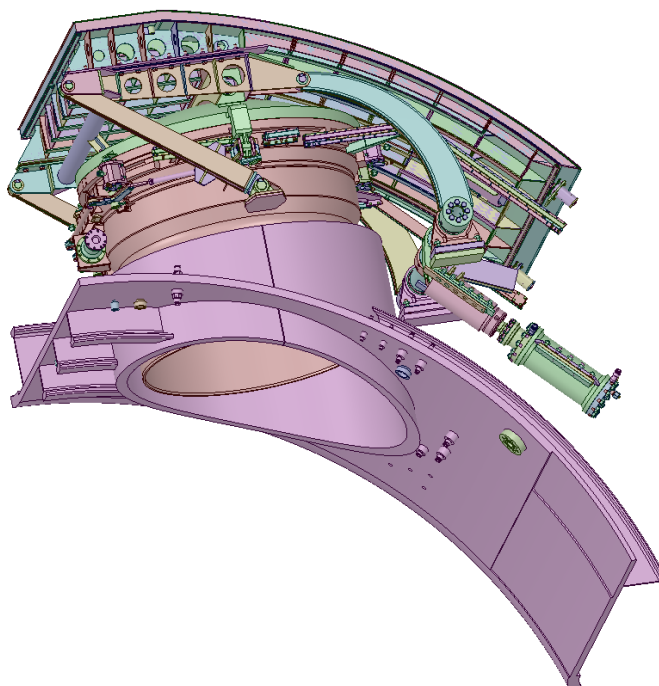


Рис. 24. Геометрическая модель ПУ с приводом открывания крышки с обтекателем

Как видно из рис. 24, исходная геометрия представляет собой конструкторскую модель сложной системы, состоящей из самого обтекателя, рамы, на которой он установлен, рычагов, тяг, валов, опорных подшипников и привода. По данной модели создаётся рабочая конструкторская документация. Соответственно в ней присутствуют все детали и их конструктивные элементы, которые впоследствии будут изображены на чертежах.

#### 4.2. Основные допущения, принимаемые в расчёте

Учитывая малые размеры многих деталей и их конструктивных элементов относительно размеров всей конструкции, при создании дискретной модели линейный размер конечных элементов необходимо также назначать малым. При

этом, учитывая наличие множества деталей, контактирующих между собой, необходимо назначать множество контактных зон между ними. Это приведёт к существенной трате времени и машинных ресурсов вплоть до невозможности решить задачу в разумные сроки. Поэтому для проведения расчёта она является избыточной и необходимо произвести её упрощение, преобразовав в расчётную.

Для преобразования конструкторской модели в расчётную необходимо сначала составить её расчётную схему, на которой будут отражены основные геометрические формы, крепления, нагрузки, материалы.

При составлении расчётной схемы необходимо принять множество допущений. Из инженерной практики проведения подобных расчётов известно, что самыми слабыми элементами в данной задаче являются сварные листовые конструкции. Рассмотрим лишь сам обтекатель, установленный на раму, принимая следующие допущения:

1. Рычаги привода считаются абсолютно жёсткими и неподвижными, как и их фундаменты.
2. Крышка ПУ является жёсткой и неподвижной, как и её фундамент.
3. Трение в шарнирах отсутствует.
4. Сварные швы отсутствуют, модели обтекателя и рамы представляют собой монолитные конструкции.
5. Толщина листов обтекателя, рамы и их силовых элементов много меньше их длины и ширины.
6. Болтовое соединение между обтекателем и рамой отсутствует: они жёстко «склеены» между собой.
7. Конструкция изготовлена из упругого изотропного материала.
8. Перемещения в конструкции малы по сравнению с её габаритами.
9. Нагрузкой является давление, равномерно распределённое по всей площади обшивки обтекателя.

#### **4.3. Составление расчётной схемы**

Приняв указанные допущения, можно составить расчётную схему конструкции (рис. 25), в которой обтекатель и рама аппроксимированы оболочками. При оболочечной идеализации твердотельной геометрии оперирование идёт средними поверхностями, толщина которых задана параметрически. В конструкторской модели между обтекателем и рамой существуют регулировочные проставки, поэтому в расчётной модели между ними созданы твердотельные проставки, с верхними и нижними гранями которых обтекатель и рама соединяются при помощи контакта «склейки».

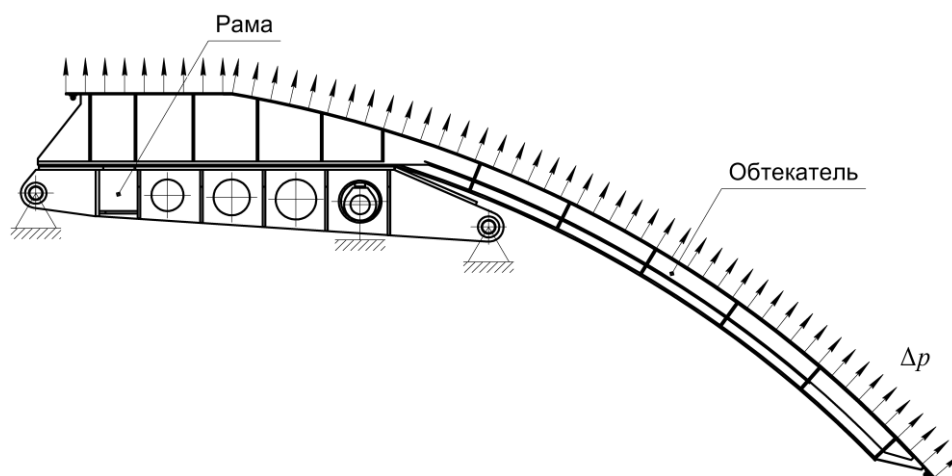


Рис. 25. Расчётная схема обтекателя

В качестве граничных условий приняты шарнирные опоры в местах крепления рамы к рычагам и крышке ПУ, равномерно распределённое давление, приложенное по всей площади обшивки обтекателя.

Физические и механические свойства материала приведены в табл. 17.

Т а б л и ц а 17

Физические и механические свойства материала

Наименование параметра	Единица	Значение
Плотность	кг/м <sup>3</sup>	7850
Модуль нормальной упругости (модуль Юнга)	Па	2·10 <sup>11</sup>
Коэффициент Пуассона	—	0,3

Учитывая сложность геометрии решаемой задачи, не представляется возможным получить точное аналитическое решение даже в рамках принятых допущений. Задачу можно решить лишь приближёнными численными методами, например рассмотренным выше методом конечных элементов в любом из доступных пакетов структурного анализа.

#### 4.4. Построение дискретной (сеточной) модели

Определим параметры дискретной модели, учитывая особенности её построения, принятые допущения и составленную расчётную схему.

Основная часть модели аппроксимирована оболочечными элементами. Для построения упорядоченной конечно-элементной сетки каждая линия разбивается на определённое число отрезков. Количество разбиений определяет размер эле-

ментов и подбирается таким образом, чтобы элементы являлись четырёхугольными с примерно одинаковыми сторонами, а сама сетка – упорядоченной.

В реальных конструкциях, состоящих из множества контактирующих между собой деталей, разбиение областей с криволинейными контурами на простые геометрические фигуры, ручное задание параметров разбиения на каждом ребре, и последующее их уточнение – длительные и трудоёмкие процедуры. Поэтому в рассматриваемой задаче воспользуемся автоматическим генератором сеток, для чего зададим глобальный линейный размер элемента в свойствах сеточного генератора, равный 10 мм, и некоторые области, в которых будет строиться упорядоченная сетка.

Подбор линейного размера элемента и областей с упорядоченной сеткой производится итерационно. Цель этого процесса – оптимизировать количество узлов в модели, чтобы добиться приемлемой точности при наименьшем времени решения.

#### **4.5. Создание расчётной геометрической модели**

В соответствии с допущениями, сформулированными в подразд. 4.2, и расчётной схемой, описанной в подразд. 4.3, упростим исходную геометрическую модель. Для этого:

- оставим в модели только обтекатель и раму;
- уберём из модели все крепёжные элементы;
- удалим малые конструктивные элементы, не оказывающие сильного влияния на общее поле перемещений, деформаций и напряжения в конструкции (скругления, фаски, малые отверстия);
- преобразуем листовые детали в срединные оболочки и срединные пластины;
- произведём разбиение полученных оболочек и пластин на отдельные области для построения на них упорядоченных сеток;
- объединим топологию обтекателя и рамы в две под сборки для построения на них согласованной сетки.

Обтекатель и рама состоят из отдельных листовых деталей. При анализе всей сборки отдельные, неподвижные относительно друг друга компоненты можно скреплять между собой при помощи контакта «склейки». Однако данный способ отличается большой трудоёмкостью при создании множества контактов и большой ресурсоёмкостью при расчёте множества контактных пар. Для упрощения и ускорения численного анализа на сетках с одинаковым типом конечных элементов рационально использовать построение согласованной сетки на совпадающих рёбрах с последующим объединением совпадающих узлов.

#### **4.6. Планирование кросс-верификации**

Учитывая сложность решаемой задачи, отсутствие возможности аналитического решения и проведения экспериментального исследования НДС существую-

щей конструкции, для подтверждения правильности выполнения расчёта сравним полученные данные с результатами расчётов, проведённых ранее в пакете ANSYS и представленных на рис. 26–28.

Из рис. 27 и 28 видно, что пиковые результаты эквивалентных напряжений по Мизесу получены в местах концентрации напряжений, образовавшихся в месте стыка сеток различных деталей. Подобные скачки образуются из-за дискретизации и упрощения геометрической модели, а также из-за допущений, принятых в линейной теории упругости. В инженерной практике для получения точного решения расчёт производится при помощи метода субмоделирования, основной принцип которого заключается в переносе (интерполяции) перемещений, полученных из расчёта полной модели в местах размещения границ подмодели, на узлы подмодели с более мелкой сеткой. Субмоделирование производится в два этапа. На первом этапе решается полная модель на грубой сетке. На втором этапе из модели вырезается рассматриваемая область, на границах выреза задаются перемещения, интерполированные из полной модели, и задача решается на мелкой сетке.

Вопросы субмоделирования выходят за границы данного пособия, поэтому в текущей задаче будем рассматривать напряжения в областях, удовлетворяющих принципу Сен-Венана.

Для кросс-верификации ПО «Логос–Прочность» и ANSYS Mechanical APDL возьмём значения максимального перемещения и напряжения, представленные в табл. 18

Т а б л и ц а 18

Эталонные результаты для кросс-верификации

Параметр	Обозначение	Единица	Значение	
			линейный расчёт	нелинейный расчёт
Максимальные перемещения	$\delta_{\max}$	м	0,029406	0,029487
Эквивалентные напряжения	$\sigma_{\text{экв}}$	Па	$1,87979 \cdot 10^8$	$1,87130 \cdot 10^8$

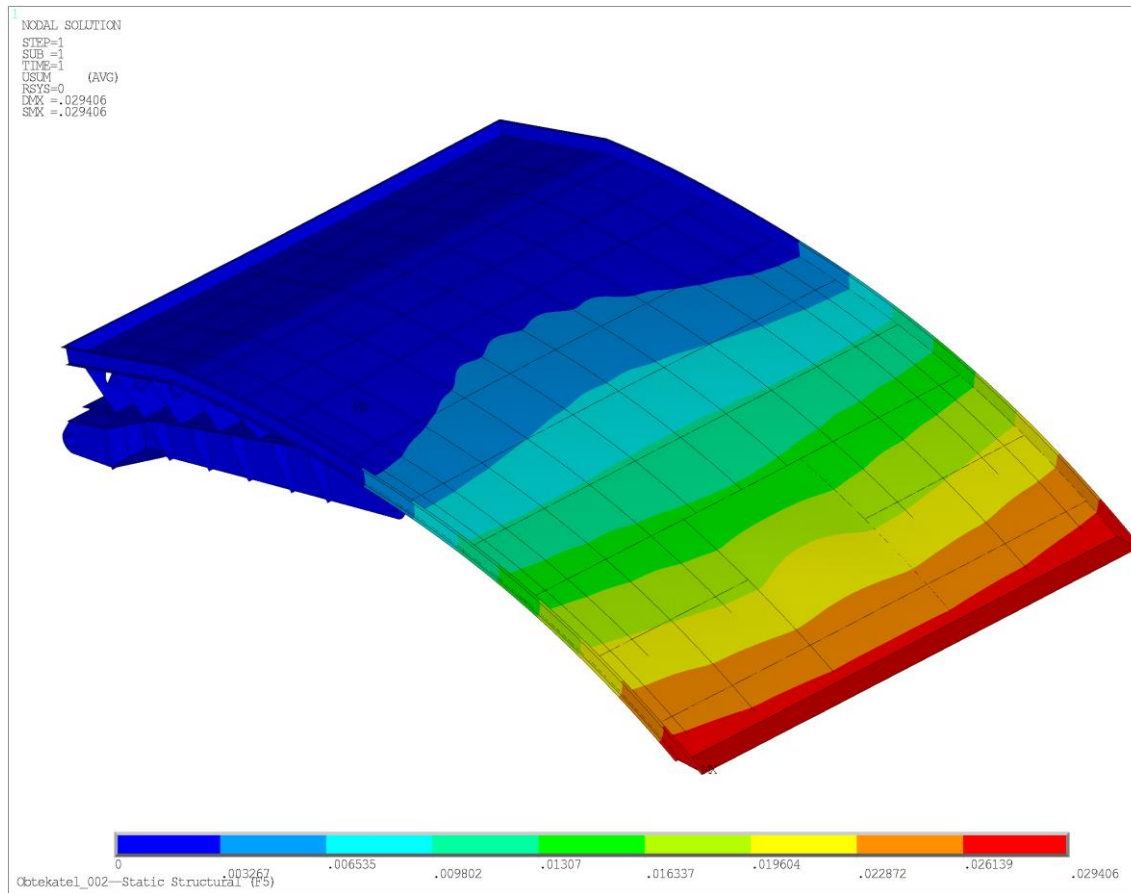


Рис. 26. Поле результирующих перемещений (м)

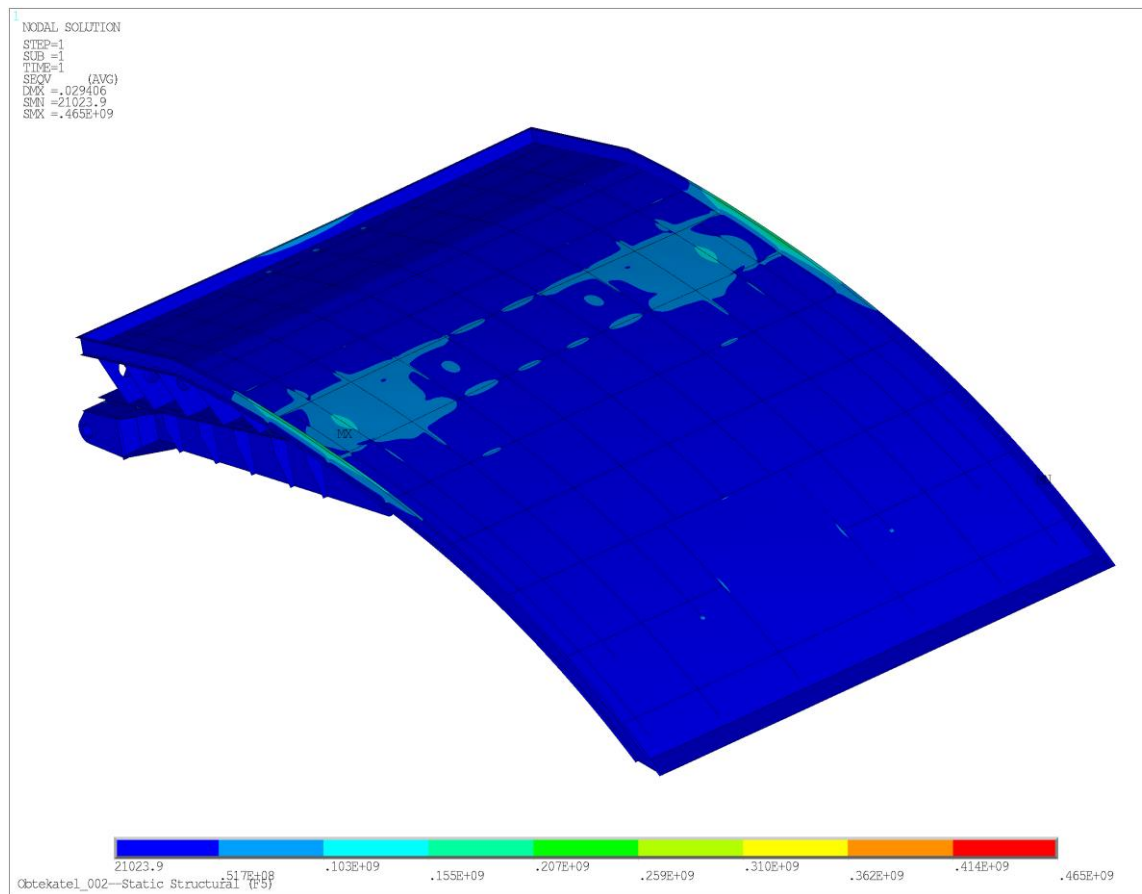


Рис. 27. Поле эквивалентных напряжений по Мизесу (Па). Вид сверху

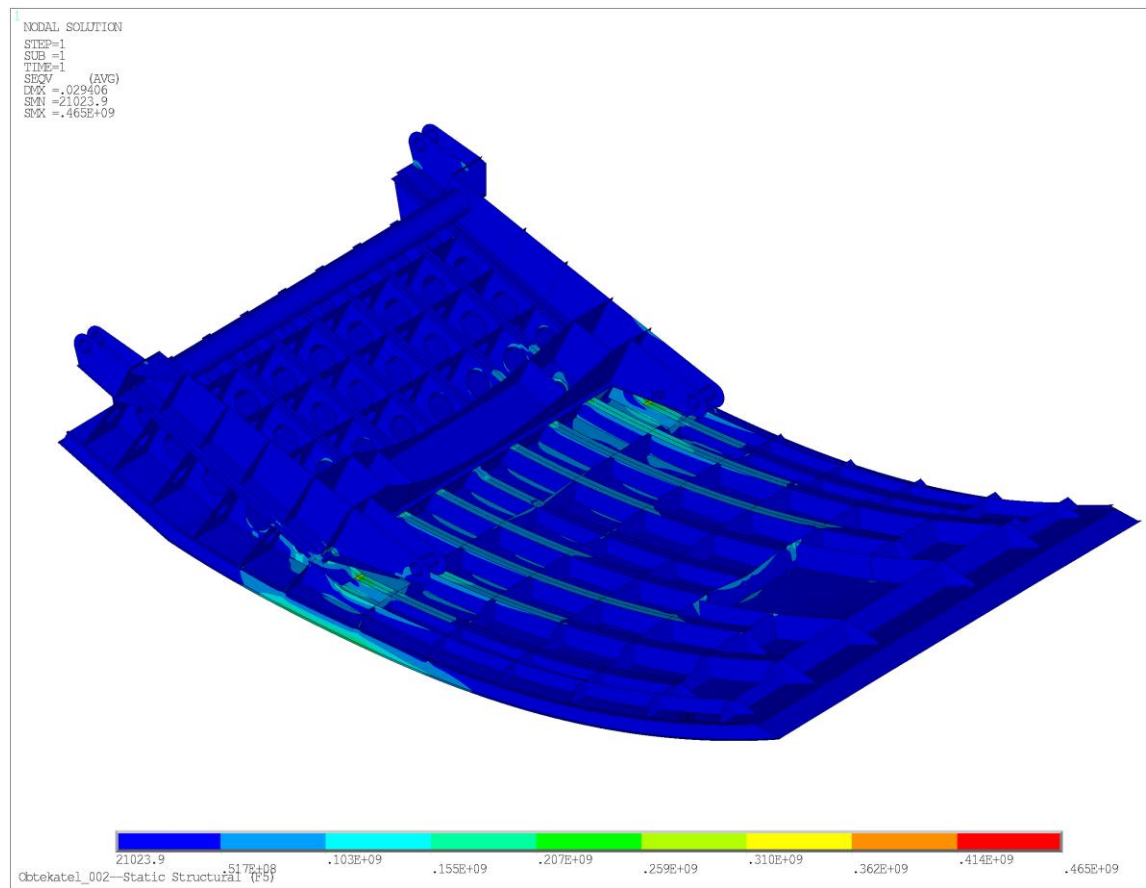


Рис. 28. Поле эквивалентных напряжений по Мизесу (Па). Вид снизу

#### 4.7. Построение численной физической модели и решение задачи средствами ПО «Логос–Прочность»

Для корректного сравнения результатов численных расчётов в различных пакетах конечно-элементного анализа желательно, чтобы расчёты были выполнены на одинаковых сетках. Поэтому для расчёта в ПО «Логос–Прочность» возьмём конечно-элементную модель, созданную ранее в ANSYS Mechanical APDL. Для этого в главном меню ANSYS Mechanical APDL выберем последовательно команды *Preprocessor* → *Archive Model* → *Write*. Появится диалоговое окно *Write Geometry/Loads for Archiving* (рис. 29).

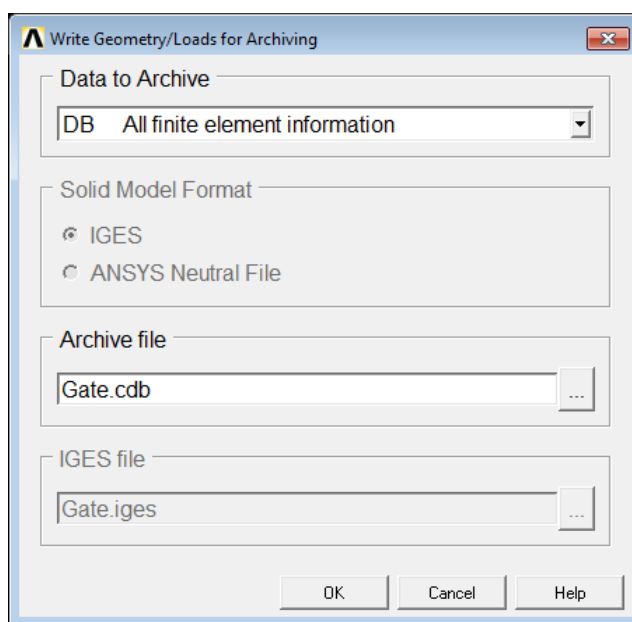


Рис. 29. Диалоговое окно сохранения конечно-элементной модели в ANSYS Mechanical APDL

В появившемся окне в поле *Data to Archive* выберем пункт *DB All finite element information* и в поле *Archive file* введем имя файла, в который будет сохранена информация о сеточной модели, в данном случае назовём его *Gate.cdb*. Он сохранится в рабочую папку ANSYS Mechanical APDL, откуда его необходимо скопировать в рабочую папку задачи, решаемой в Логос.

Далее запускаем Логос.ПреПост. Для загрузки созданной ранее сетки в главном меню выберем *Модель* → *Импорт модели* → *Логос–Прочность*. В появившемся окне *Открыть* необходимо перейти в рабочую директорию, в которую был сохранён файл *Gate.cdb*, и открыть его.

При импорте сеточной модели из ANSYS Mechanical APDL импортируются все параметры, которые были заданы в *Real Constants* и *Analysis Type*, все свой-

ства материалов и граничные условия. Однако импорт не всегда проходит успешно, и некоторые значения могут отличаться от заданных изначально. Поэтому необходима проверка импортированной модели.

В качестве материала конструкции примем упругий изотропный материал с физическими и механическими характеристиками, представленными в табл. 17.

Для задания свойств материала в панели управления необходимо выбрать раздел *Материалы*, нажать на нём правой кнопкой мыши, и в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Добавить*. В дереве модели в разделе *Материалы* появится пункт *Материал\_1*. По двойному клику откроется окно задания свойств материала.

В поле *Имя материала* зададим наименование *Steel*. В поле *Доступные свойства*, развернув списки *Основные* и *Модели деформирования* → *Упругие* и поставив галочки напротив свойств *Плотность* и *Изотропная*, зададим свойства из приведенных в табл. 17.

Для задания параметров расчёта в панели управления необходимо выбрать раздел *Задача* и в мастере выполнения операций в графе *Тип расчёта* – пункт *Статическая прочность*.

Развернем раздел *Параметры счётных модулей* в панели управления и сделаем двойной клик по подразделу *Свойства подобласти*. Откроется окно *Свойства подобласти*.

Сначала в области управления наборами создадим набор данных, нажав кнопку *Добавить*.

Зададим свойства для оболочечных элементов. Для этого в области для задания подобластей, входящих в набор, выделим одну или несколько с одинаковыми параметрами и добавим её к набору. После этого в области задания параметров в поле *Материал* выберем ранее созданный материал *1 (Steel)*. В поле *Тип элемента* последовательно выберем *Оболочечный элемент*, *Элемент Голованова* и зададим толщину, соответствующую толщине выбранной оболочки.

Для подобластей, соответствующих твердотельным соединительным планкам, свойства задаются аналогично, с тем лишь отличием, что в поле *Тип элемента* последовательно выбираем *Элемент сплошной среды* и *Гексаэдр, 8 узл.*

После двойного клика по подразделу *Статическая прочность* в разделе *Параметры счётных модулей*, откроется окно *Статическая прочность*. Аналогично заданию параметров свойств подобласти создадим новый набор и перенесём в него все подобласти. Остальные параметры оставим по умолчанию.

Развернув раздел *Результаты* в панели управления и выбрав подраздел *Формат накоплений* в мастере выполнения операций, в графе *Формат* выберем пункт *EFR*.

Приложим к модели граничные условия, соответствующие расчётной схеме, приведенной на рис. 25. Для этого сначала зададим наборы узлов, в которых впоследствии будут прикладываться граничные условия. В панели управления последовательно выберем раздел *Наборы данных* и подраздел *Наборы узлов*. В мастере выполнения операций добавим два набора узлов, соответствующих шарнирному закреплению в шарнирах соединения рамы с рычагами (назовём его

$U_{XZ}$ ), и жёсткому закреплению в местах крепления крышки ПУ к раме (назовём его  $U_{XYZ}$ ).

Зададим закрепления модели. Для этого в панели управления последовательно выберем разделы *Граничные условия* → *Механика* → *Закрепления* → *Закрепления в наборах*. Нажав правой кнопкой по подразделу *Закрепления в наборах*, добавим два набора. В первом наборе в поле *Набор узлов* выберем набор  $U_{XZ}$  и степени свободы, соответствующие шарнирному закреплению, а именно:

«По X» (отсутствие перемещений вдоль оси X);

«По Z» (отсутствие перемещений вдоль оси Z).

Аналогично для второго набора выберем набор  $U_{XYZ}$  и степени свободы, соответствующие жёсткой заделке, а именно:

«По X» (отсутствие перемещений вдоль оси X);

«По Y» (отсутствие перемещений вдоль оси Y);

«По Z» (отсутствие перемещений вдоль оси Z).

Зададим набор граней, к которым будет приложено равномерно распределённое давление. Для этого в панели управления последовательно выберем раздел *Наборы данных* и подраздел *Наборы граней*. В мастере выполнения операций добавим один набор, соответствующий поверхности обшивки обтекателя (назовём его *Press*).

Зададим нагрузки, действующие на обтекатель. Рассматриваемая постановка задачи относительно проста, и при её усложнении (увеличении числа элементов, увеличении нагрузки на несколько порядков, учёте в модели больших перемещений и упругопластического поведения материала) расчёт необходимо будет производить в несколько шагов с последовательным увеличением приложенной силы. Поэтому в подобных прикладных задачах лучше сразу предусмотреть возможность дальнейшего усложнения анализа и задать нагрузку в виде прямой, монотонно возрастающей от нуля до действующего значения. Для этого в панели управления последовательно выберем разделы *Функциональные зависимости* → *Кривые*. Нажав правой кнопкой по подразделу *Кривые*, добавим один набор и назовём его *Press*. Раскрыв созданный набор в мастере выполнения операций, создадим прямую по двум точкам с координатами, представленными в табл. 19, согласно расчётной схеме, приведенной на рис. 25.

Т а б л и ц 19

Координаты прямой, задающей давление на обтекатель

Абсцисса	Ордината
0	0
1	10000

Для приложения заданного давления непосредственно к модели в панели управления последовательно выберем разделы *Нагрузки* → *Механика* → *Давление* → *Давление, приложенное к набору*. Нажав правой кнопкой по подразделу

Давление, приложенное к набору, добавим один набор. В нём в поле *Набор граней* выберем набор *Press* и в поле *Кривая* – кривую *1 Press*.

Зададим наборы контактирующих между собой граней, в которых будут созданы контактные элементы. Для этого в панели управления последовательно выберем раздел *Наборы данных* и подраздел *Наборы граней*. В мастере выполнения операций добавим восемь наборов, соответствующих контактным поверхностям обтекателя, рамы и соединительных проставок (рис. 30–32).

Для упрощения выбора нужных граней некоторые подобласти можно скрыть. Конкретно в рассматриваемой задаче, номера подобластей, соответствующие различным элементам модели, приведены в табл. 20.

Т а б л и ц а 20

Номера подобластей, соответствующих элементам модели

Элемент модели	Номера подобластей
Обтекатель	37–89, 111–131
Рама	1–36, 92–110
Соединительные проставки	90, 91

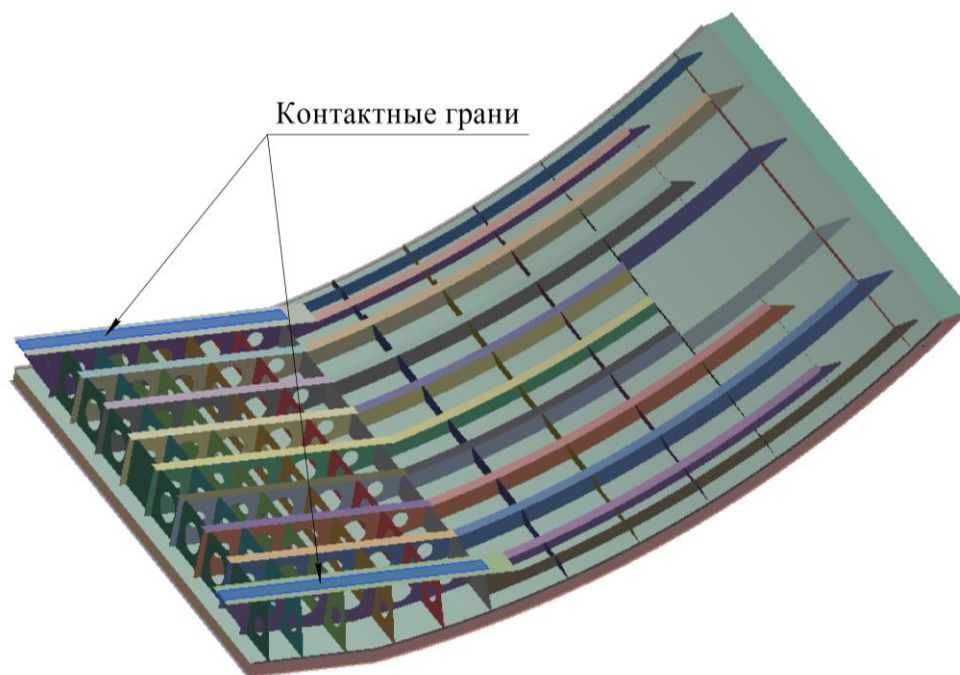


Рис. 30. Контактные грани на обтекателе

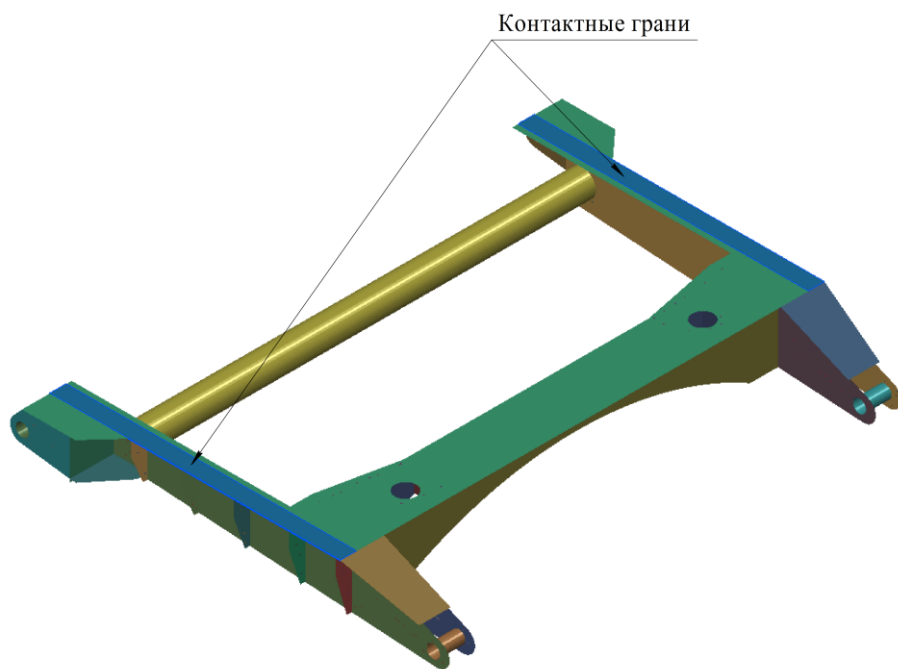


Рис. 31. Контактные грани на раме

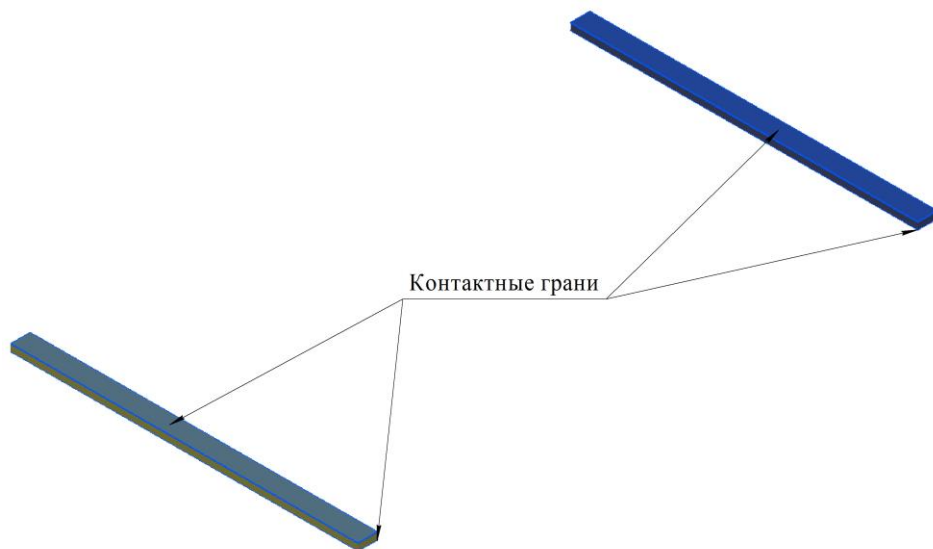


Рис. 32. Контактные грани на соединительных проставках

Зададим четыре контакта между обтекателем и соединительными проставками, и между соединительными проставками и рамой. Для этого в панели управления необходимо выбрать раздел *Контакты*, нажать на нём правой кнопкой мыши, и в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Добавить*, указав число добавлений, равное четырём. Для каждого контакта в мастере выполнения операций необходимо указать следующие параметры:

«Тип контакта»: «Склейка»;

«Контактный метод»: «Исключение переменных»;

«Тип подчинённой»: «Набор граней»;

«Тип главной»: «Набор граней».

Для каждой контактной пары необходимо указать главную и подчинённую грань из наборов, созданных ранее.

После задания всех параметров задачи, перед запуском расчёта необходимо сохранить модель. Для этого в главном меню выберем *Модель* → *Сохранить* → *Модель*. В появившемся диалоговом окне *Выбор файла для экспорта модели* выберем рабочую папку и в поле *Имя файла* введем *Gate*. После этого запускаем расчёт нажатием кнопки *Запустить расчётную задачу* на панели инструментов.

#### 4.8. Обработка и анализ полученных результатов

Просмотр результатов расчёта производится в отдельной программе ScientificView, для запуска которой необходимо нажать на её иконку на панели инструментов либо запустить через меню «Пуск».

Откроем файл результатов расчёта в ScientificView. Для этого в главном меню программы нажмём *Файл* → *Открыть* и в появившемся окне *Открыть* укажем путь до папки, в которой находится файл с результатами первого шага нагружения: ...\*Gate*\*Gate.RESULTS*\*EFR\_CUT*\*Gate\_001*, после чего выберем файл с результатами расчёта: *Gate\_001.efr*.

ПО «Логос–Прочность» сохраняет файлы результатов в формате \*.efr в папке с именем модели. Каждому шагу нагружения соответствует отдельная папка, имя которой заканчивается номером шага. Открывать всегда следует первый шаг.

Для просмотра результатов расчёта в окне информации необходимо перейти на рассматриваемый шаг (в данном случае – второй) при помощи кнопки *Перейти к следующему временному шагу*.

Отобразим поле результирующих перемещений и эквивалентных напряжений по Мизесу, возникших в обтекателе. Для этого на панели отображения выставим отображение величин в узлах и выберем требуемую отображаемую величину *Displ\_Result* и *Nd\_VnMisStress* соответственно. Результаты представлены на рис. 33–35.

Met LOGOS Time: 1.000000 сек Array: Matter Min/max: 1.000000e+000 : 1.000000e+000

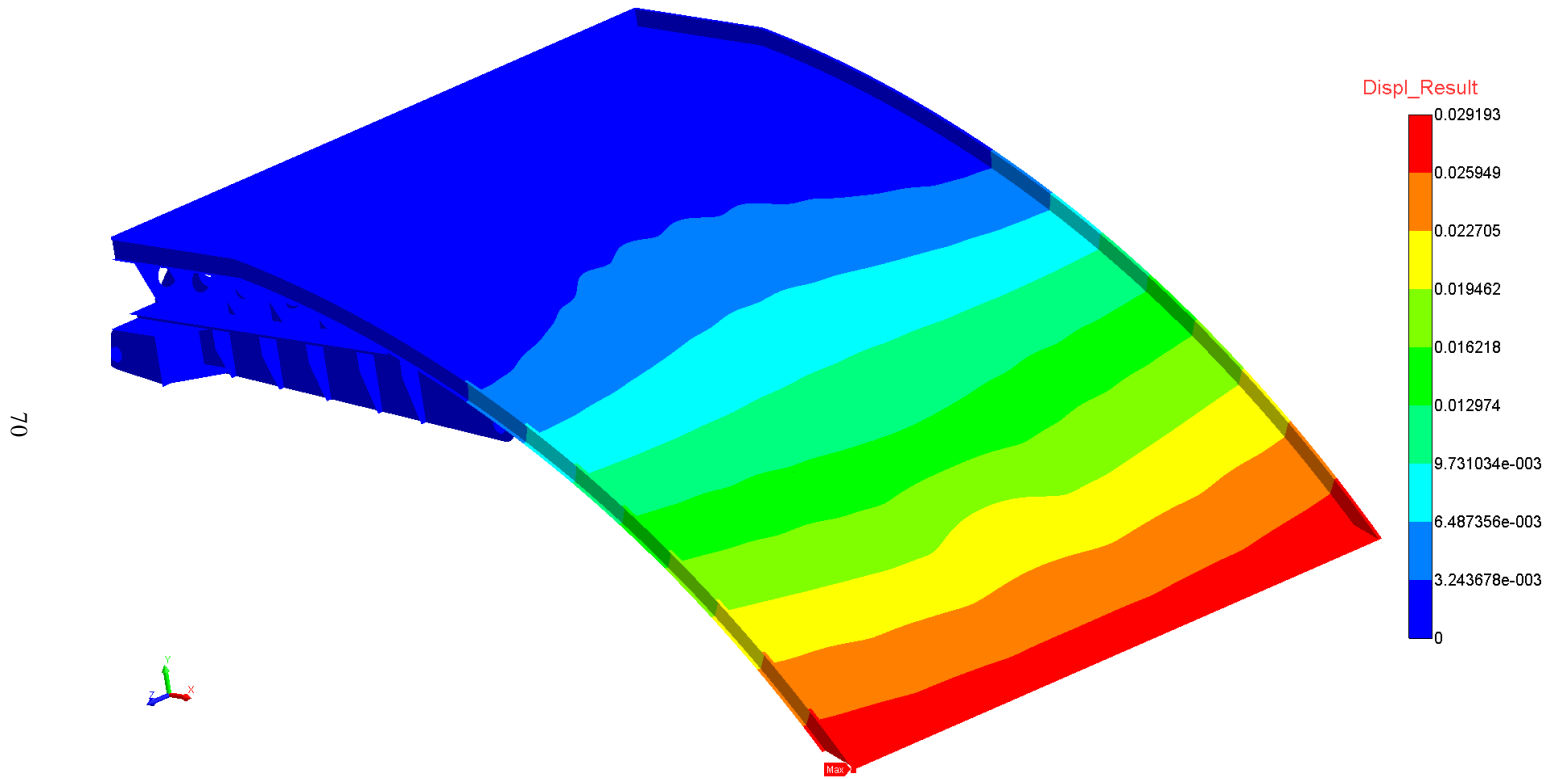


Рис. 33. Поле результирующих перемещений (м)

Met LOGOS Time: 1.000000 сек Array: Nd\_VnMisStress Min/max: 4.278043e+004 : 5.457688e+008

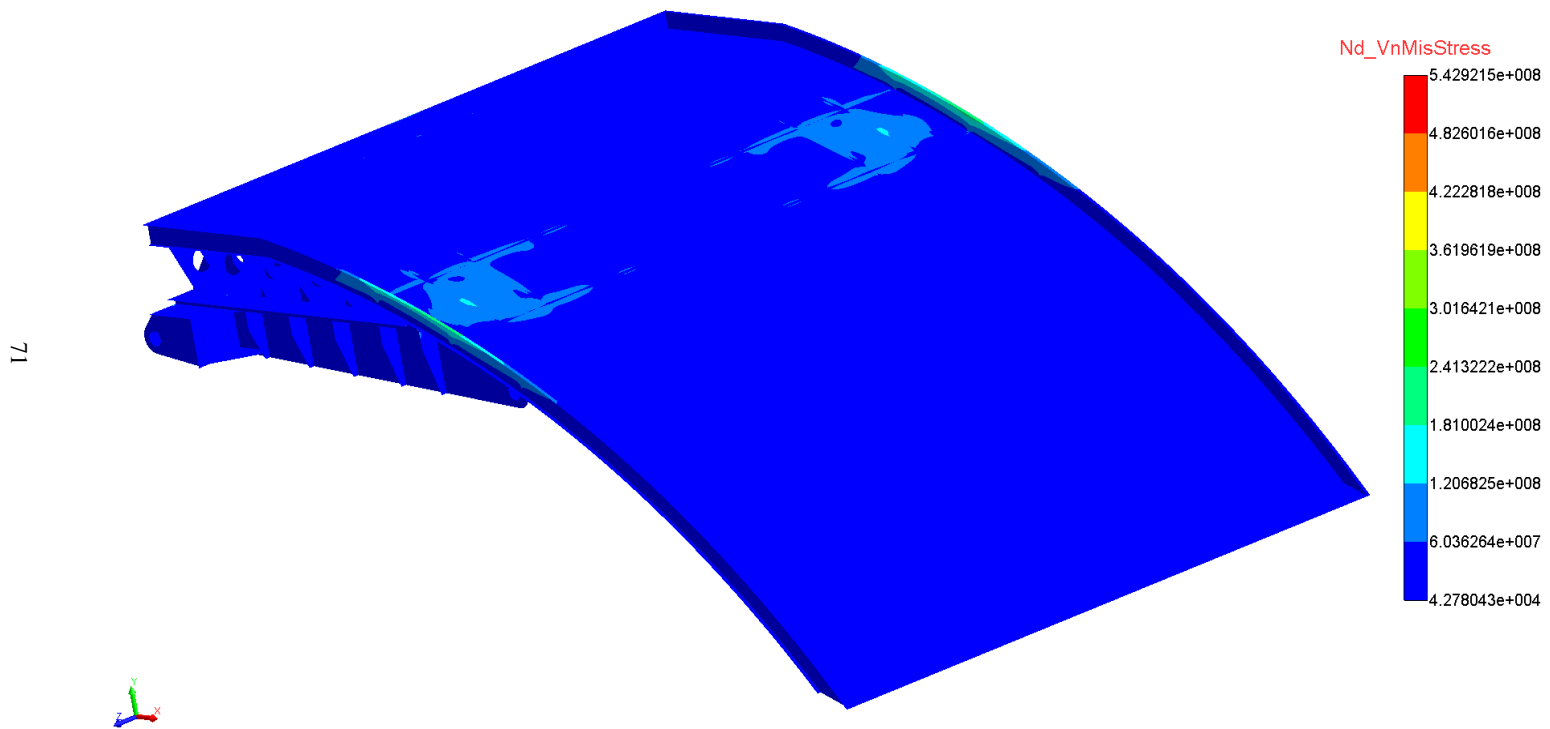


Рис. 34. Поле эквивалентных напряжений по Мизесу (Па). Вид сверху

Met LOGOS Time: 1.000000 сек Array: Nd\_VnMisStress Min/max: 4.278043e+004 : 5.457688e+008

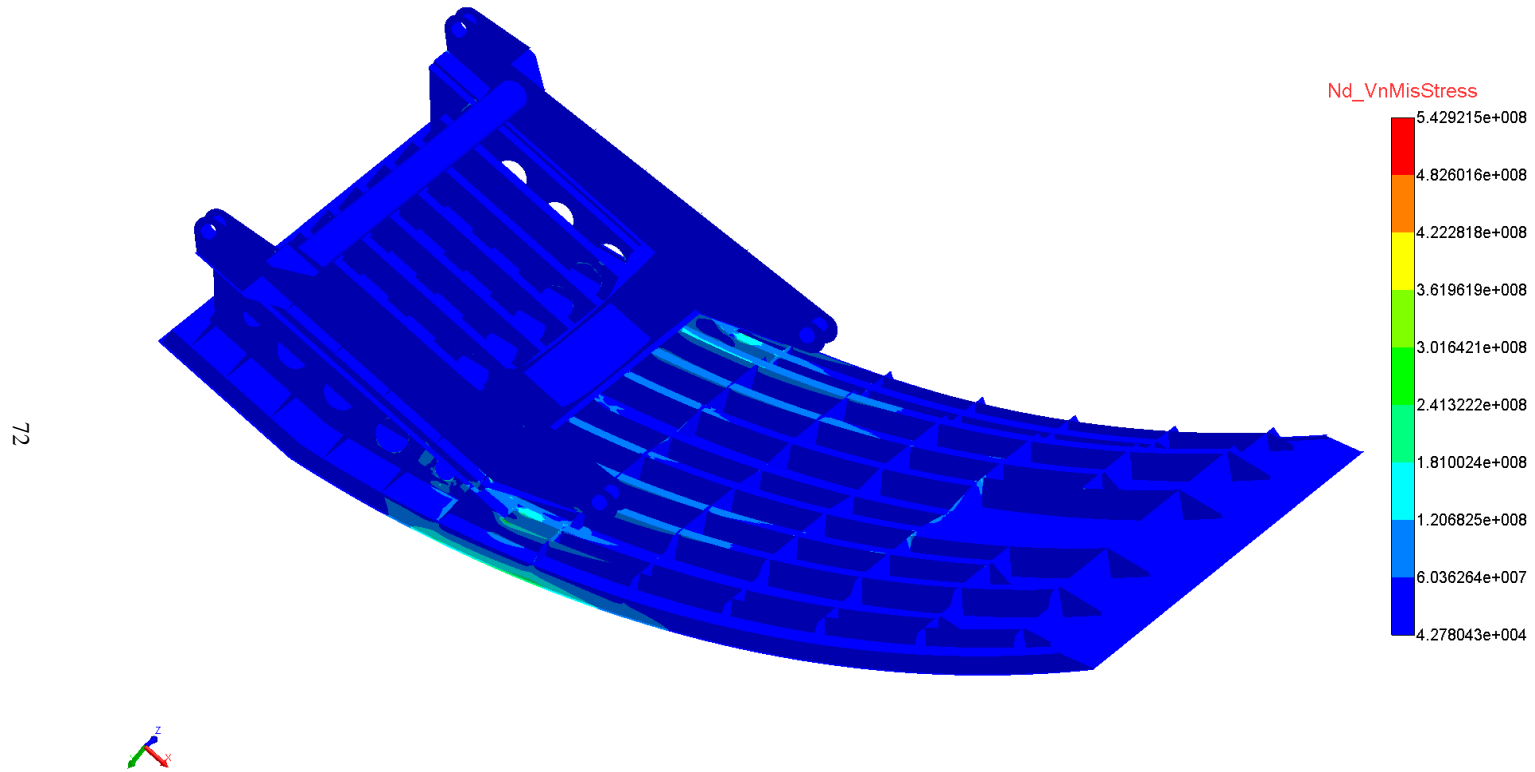


Рис. 35. Поле эквивалентных напряжений по Мизесу (Па). Вид снизу

#### 4.9. Кросс-верификация компьютерных моделей и исследование влияния используемых численных методов на результаты решения

Как видно из рис. 27,28,34,35, максимальные значения эквивалентных напряжений по Мизесу, полученные в ANSYS Mechanical APDL и ПО «Логос–Прочность», сильно различаются. Поэтому для кросс-верификации обоих модулей возьмём значения максимального перемещения и напряжения в произвольной точке, приведенные в табл. 18.

Согласно ст. 3.30 ГОСТ Р 57700.10-218 точность (в процентах) численного расчёта, выполненного в ПО «Логос–Прочность» относительно выполненного в ANSYS Mechanical APDL определяется как

$$\Delta = \frac{A_{ANSYS} - A_{\text{Логос}}}{A_{ANSYS}} \cdot 100,$$

где  $A_{ANSYS}$  и  $A_{\text{Логос}}$  – параметры, полученные в соответствующих модулях.

Для включения учёта больших перемещений в ПО «Логос–Прочность» необходимо в панели управления последовательно развернуть разделы *Параметры счётных модулей* и *Статическая прочность*, после чего сделать двойной клик по подразделу *Нелинейность*. В появившемся окне *Нелинейность* поставить галочку *Геометрическая нелинейность*. Сравнение результатов расчёта, выполненных в линейной и нелинейной постановке, в ПО «Логос–Прочность» и ANSYS Mechanical APDL, представлено в табл. 21.

Т а б л и ц а 21

Результаты кросс-верификации

ПО	Максимальные перемещения, $\delta_{\max}$ , М			Эквивалентные напряжения, $\sigma_{\text{экв}}$ , Па		
	линейный расчёт	нелинейный расчёт	разница, %	линейный расчёт	нелинейный расчёт	разница, %
ANSYS Mechanical APDL	0,029406	0,029487	–0,275	$1,87979 \cdot 10^8$	$1,87130 \cdot 10^8$	0,452
Логос–Прочность	0,029193	0,029512	–1,093	$1,86288 \cdot 10^8$	$1,87181 \cdot 10^8$	–0,479
Точность, $\bar{\Delta}$ , %	0,724	–0,085	—	0,900	–0,027	—

Как видно из табл. 21, результаты расчёта, полученные в ANSYS Mechanical APDL и ПО «Логос–Прочность», различаются менее чем на 1 % в линейной постановке и менее чем на 0,1 % в геометрически нелинейной постановке, с учётом принятых допущений. Данное расхождение вызвано ошибками округления при выполнении численных расчётов и пренебрежимо мало по сравнению с погрешностью принимаемых допущений.

### **Библиографический список**

1. ГОСТ Р 57412–2017. Компьютерные модели в процессах разработки, производства и эксплуатации изделий. Общие положения. М.: Стандартинформ, 2017. 11 с.
2. ГОСТ Р 57700.10–2018. Определение напряжённо-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов конструкций в упругой области. М.: Стандартинформ, 2018. 12 с.
3. ГОСТ Р 57188 –2016. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2016. 8 с.
4. ГОСТ 2.052–2015. Электронная модель изделия. Общие положения. М.: Стандартинформ, 2016. 11 с.
5. *Погорелов, В.И.* Строительная механика тонкостенных конструкций СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 528 с.
6. *Биргер, И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчёт на прочность деталей машин: справочник. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЁТАХ .....	3
1.1. Основные понятия механики деформируемого твёрдого тела .....	3
1.2. Создание расчётных схем .....	6
1.3. Методы численного физического моделирования.....	14
1.4. Возможности современного программного обеспечения, применяемого для решения статических задач механики деформируемого твёрдого тела.....	21
2. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ИЗВЕСТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ.....	22
2.1. Задача о растяжении пластины, ослабленной круглым вырезом.....	22
2.2. Аналитическое решение задачи .....	26
2.3. Построение дискретной (сеточной) модели .....	28
2.4. Построение численной физической модели и решение задачи Кирша средствами ПО «Логос–Прочность».....	31
2.5. Обработка и анализ полученных результатов.....	38
2.6. Верификация компьютерных моделей на примере решённой задачи .....	44
2.7. Влияние линейного размера конечного элемента на результаты решения задач .....	44
3. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ИЗВЕСТНЫМ ЧИСЛЕННЫМ РЕШЕНИЕМ .....	46
3.1. Задача об изгибе консольной балки .....	46
3.2. Построение дискретной (сеточной) модели .....	48
3.3. Построение численной физической модели и решение задачи средствами ПО «Логос–Прочность» .....	48
3.4. Обработка и анализ полученных результатов .....	52
3.5. Влияние линейного размера конечного элемента на результаты решения задач .....	54
3.6. Верификация компьютерных моделей на примере решённой задачи .....	54
4. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ.....	55
4.1. Задача о нагружении обтекателя пусковой установки .....	56
4.2. Основные допущения, принимаемые в расчёте .....	56
4.3. Составление расчётной схемы .....	57
4.4. Построение дискретной (сеточной) модели .....	58
4.5. Создание расчётной геометрической модели.....	59
4.6. Планирование кросс-верификации .....	59
4.7. Построение численной физической модели и решение задачи средствами ПО «Логос–Прочность» .....	64
4.8. Обработка и анализ полученных результатов.....	69
4.9. Кросс-верификация компьютерных моделей и исследование влияния используемых численных методов на результаты решения .....	73
<i>Библиографический список .....</i>	<i>74</i>

*Смирнов Александр Игоревич, Сумин Александр Викторович, Прядкин Александр Сергеевич, Барабанов Роман Анатольевич, Косарим Снежана Сергеевна, Фомичев Дмитрий Вадимович, Знаменский Евгений Александрович, Бородавкин Вячеслав Александрович, Курносов Андрей Алексеевич*

**Расчет конструкций на прочность в среде «Логос».  
Концентрация напряжений. Геометрическая нелинейность.  
Гидростатическое нагружение обтекателя**

Редактор *Г.М. Звягина*

Компьютерная верстка: *С.В. Кашуба*

Подписано в печать 13.12.2021. Формат 70x100/16. Бумага документная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 6. Тираж 300 экз. **Заказ №** .

Балтийский государственный технический университет  
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1